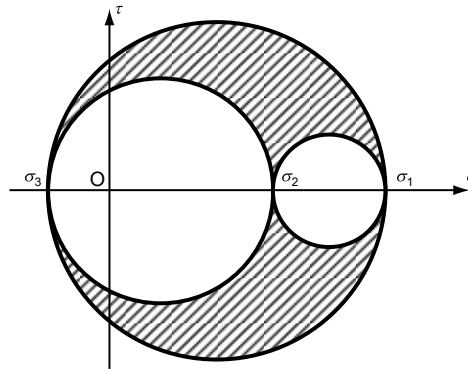


Mécanique des structures

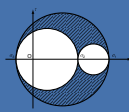


Chapitre 0: Introduction

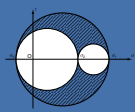
Prof. Shea & Dr. Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL

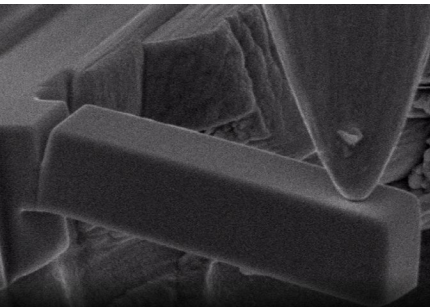




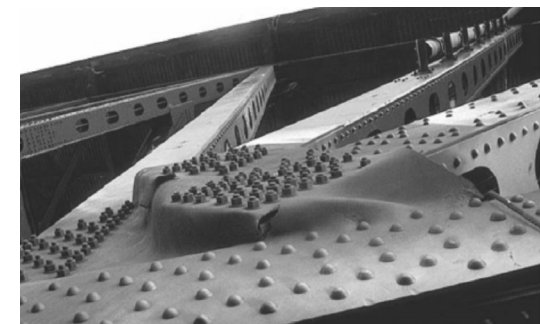
0. Introduction
1. Équilibre intérieur des solides
2. Traction ou compression simple
3. Etat de contraintes bidimensionnel
4. Cisaillement simple
5. Torsion simple
6. Flexion des poutres droites
7. Déformée des poutres droites en flexion simple
8. (Flexion dérivée et flexion composée)
- ~~9. Flexion des poutres courbes~~
10. Energie de déformation
11. Systèmes hyperstatiques
12. Flambage des poutres
13. Analyse de l'état de contrainte et de déformation
- ~~14. Élément d'élasticité linéaire~~
15. Critère de rupture de l'équilibre élastique



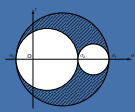
- 1) Définir le **modèle** par un **dessin** et un système de coordonnées (**hypothèses**)
- 2) Identifier tous les **efforts** (**forces et moments**) externes et internes
- 3) Identifier les inconnues (et l'**hyperstatisme**)
- 4) Appliquer les **équations d'équilibre** ($\Sigma F = 0$ et $\Sigma M = 0$)
- 5) Identifier les **mécanismes physique** et poser les **équations d'élasticité** adéquats
- 6) Calculer les contraintes (σ et τ) et définir un critère d'intégrité (ex : $\sigma_{vonMises}$)
- 7) Interpréter les résultats (**réflexion d'ingénieur**)



Micro-Cantilever Fracture Testing

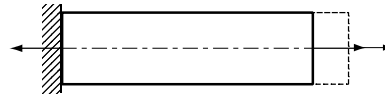


Bridge Collapse, Mississippi River 2007

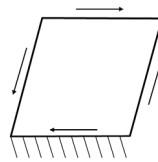


5) Identifier les mécanismes physique et poser les **équations d'élasticité** adéquats

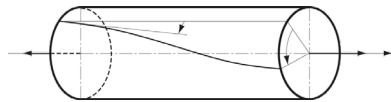
- Traction-compression



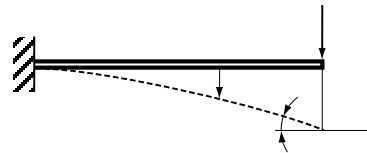
- Cisaillement



- Torsion



- Flexion



- Flambage



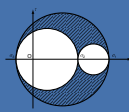
6) Calculer les contraintes (σ et τ) et définir un critère d'intégrité (ex : $\sigma_{vonMises}$)

- Loi d'élasticité

$$\sigma = E \varepsilon$$

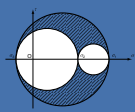
- Critère

$$n = \frac{\sigma_{limite}}{\sigma_{caractéristique}}$$



Objectifs

- **Objectif 1** : Appliquer vos connaissances de math-physique pour dimensionner des problèmes «simple» bi- ou tri-dimensionnelle
- **Objectif 2** : Déterminer les contraintes et déformations dans les structures en fonction des charges
- **Objectif 3** : Comprendre les mécanisme physique et les hypothèses mathématiques qui permettent de déterminer un critère d'intégrité (coefficient de sécurité)
- **Coefficient de sécurité**
 - pièces de structure en acier : 1.1 à 1.5
 - aviation : $n = 1.5$
 - domaine du génie civil : $n = 1.5$
 - appareils de levage industriels par chaîne/câble/sangle : $n = 4/5/7$
 - ascenseur : $n = 10$
 - mécanismes : $n = 2.5$ à 10
 - choc ou sollicitation mal connue : $n = 10 - 15$
- Identifier les incertitudes : hypothèse, propriété des matériaux, singularités, etc.
- Intérêts et limites de la simulation numérique vs mécanique des structures

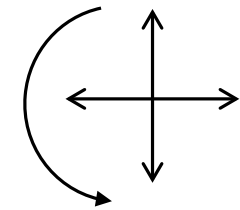


Liaisons méca. ext. planes

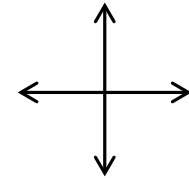
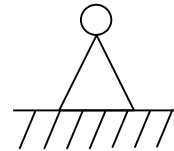
Schéma

Efforts de réactions

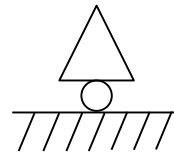
Encastrement



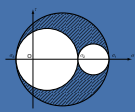
Articulation



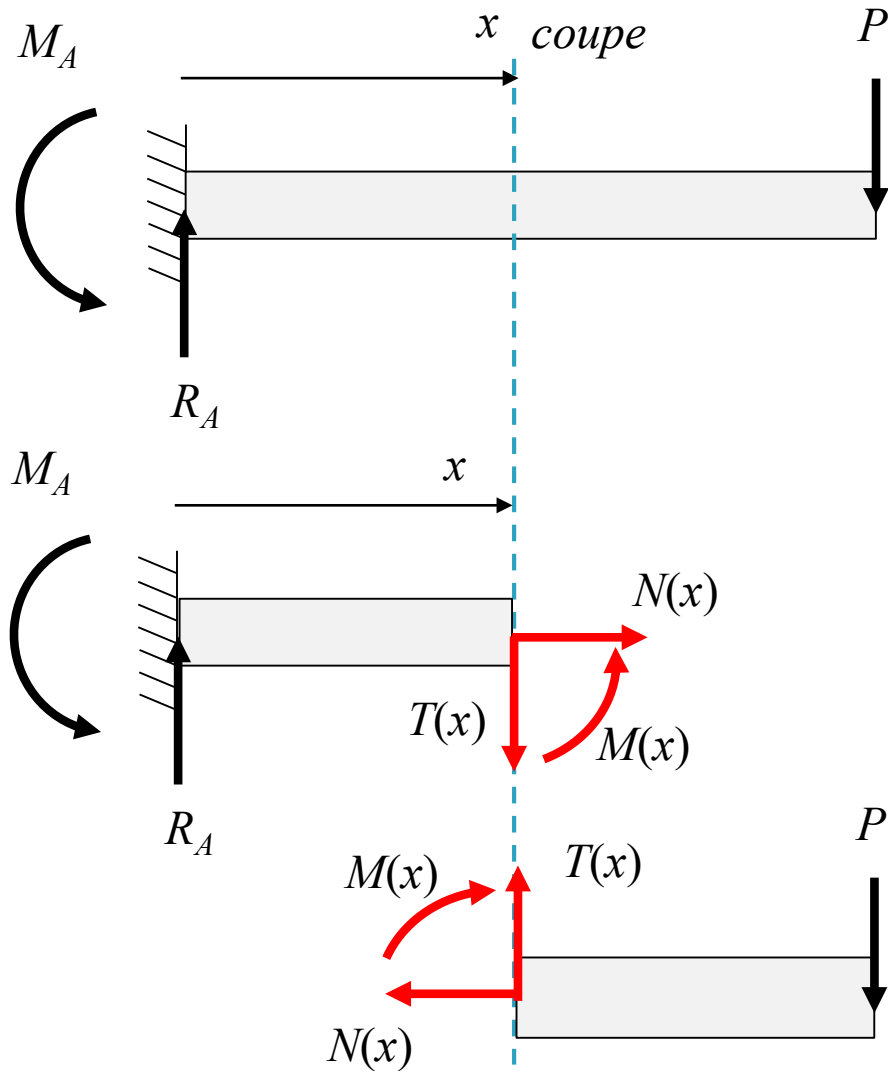
Appui simple



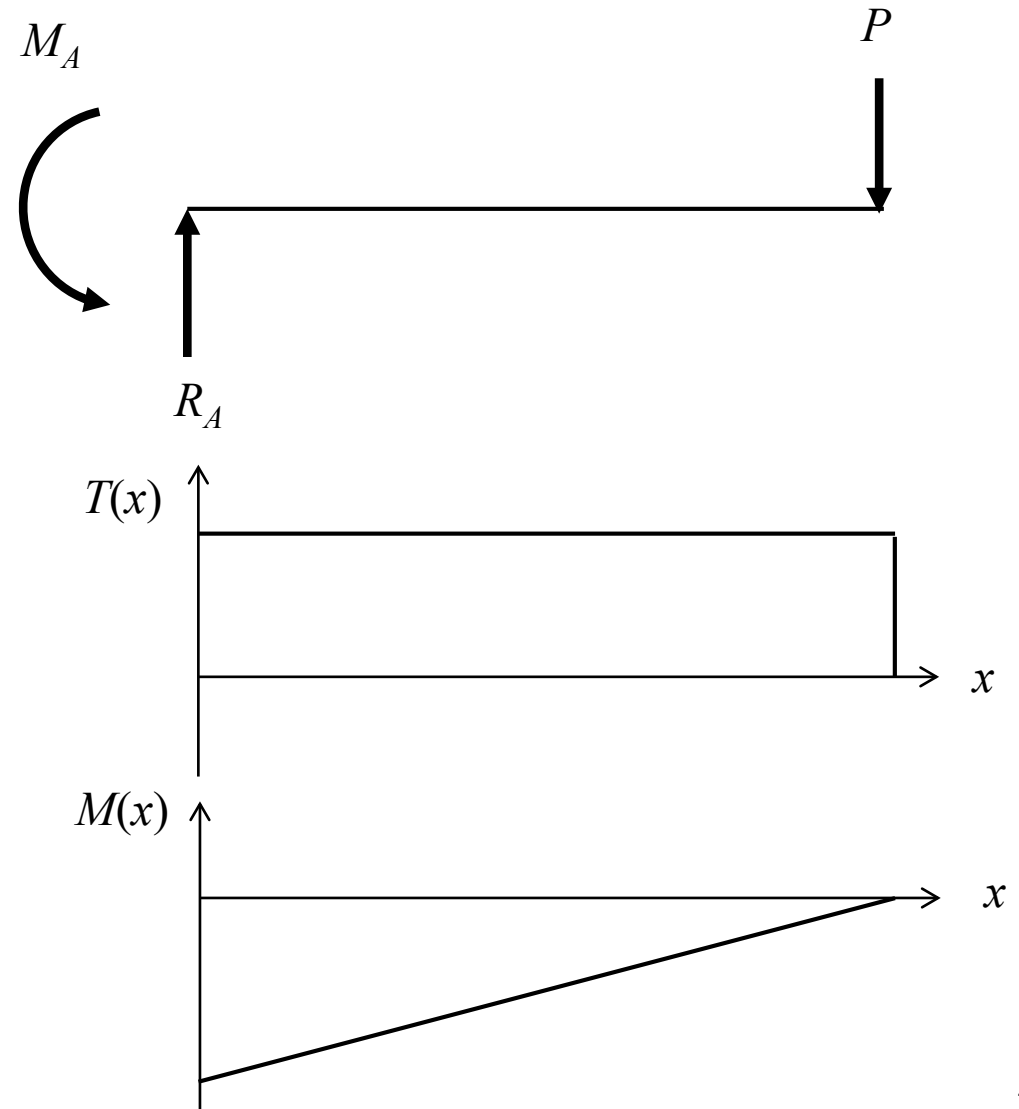
Autres liaisons mécaniques : encastrement, pivot, glissière, pivot glissant, hélicoïde, rotule appui-plan, sphère cylindrique, cylindre-plan, sphère-plan, etc.

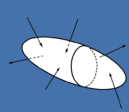


Efforts intérieurs dans une poutre



Diagrammes des efforts intérieurs





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Généralités

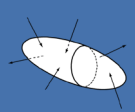
La **théorie de l'élasticité** permet seule de donner à certains résultats la généralité nécessaire et de *juger de la valeur des hypothèses* simplificatrices faites en mécanique des matériaux

La théorie de l'élasticité et la mécanique des structures sont fondées toutes deux sur la **loi de Hooke** qui suppose une proportionnalité parfaite entre contraintes et déformations. Un corps qui suit la loi de Hooke est dit **parfaitement élastique**.

La mécanique des matériaux étudie également certains solides ne suivant pas la loi de Hooke ou pour lesquels les contraintes dépassent les limites du comportement élastique. Elle débouche ainsi sur la *théorie de la plasticité*.

Cette théorie présente des difficultés mathématiques considérables en raison de la *non-linéarité* et surtout des phénomènes d'*hystérèse* intervenant dans les lois de comportement.

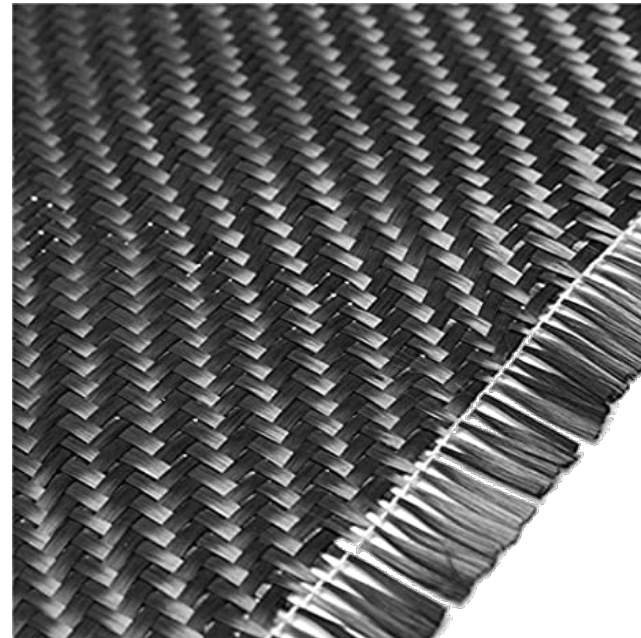
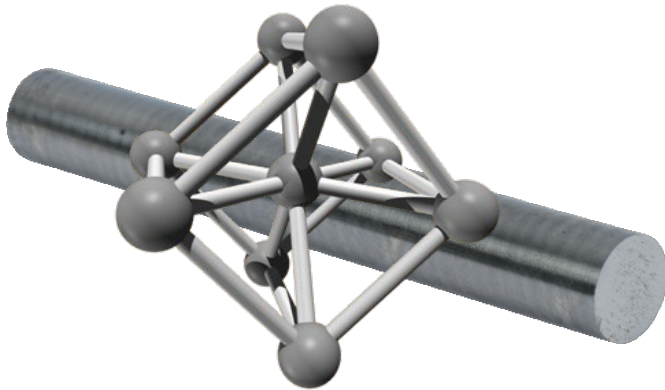
La sécurité d'un élément de construction ne dépend pas seulement du niveau maximum des contraintes et déformations mais encore de la façon dont ces grandeurs varient dans le temps. Cette nouvelle préoccupation fait l'objet des *théories du fluage et de la fatigue*.

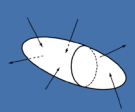


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse de *continuité* : bien que les solide soient constitué d'atome, l'étude du comportement à l'échelle macroscopique n'est possible qu'en considérant le solide comme un corps continu.
- Peut-on considérer les échantillons ci-dessous comme des matériaux continus?

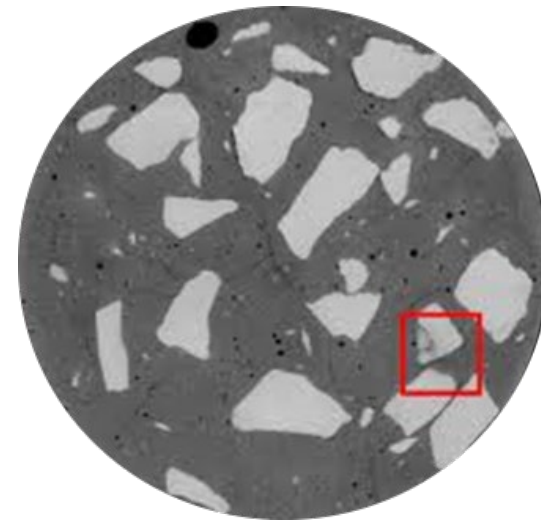




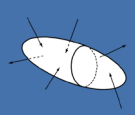
Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse d'*homogénéité* : on considérera que la matière est homogène, c'est à dire que ses propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point du solide considéré. Dans le cas contraire on peut découper le solide en plusieurs parties considérées comme homogènes et étudier l'interaction de ces parties entre elles
- Peut-on considérer les échantillons ci-dessous comme des matériaux homogènes?



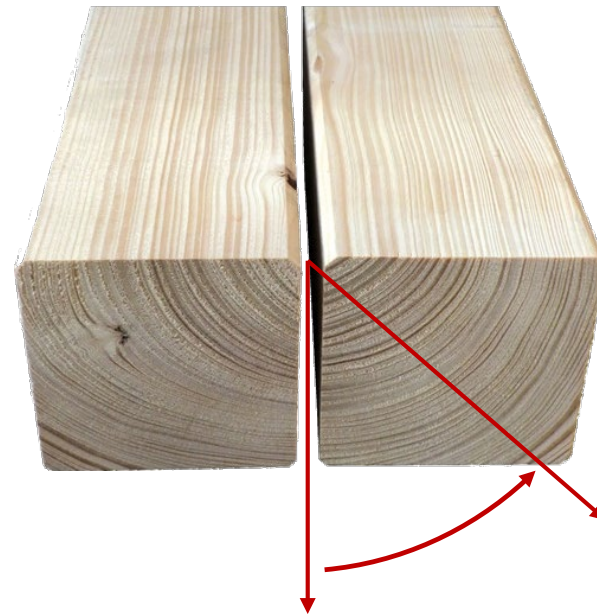
micro vs macro

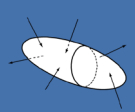


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse d'*isotropie* : nous admettrons que ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions autour d'un point
- Peut-on considérer les exemples ci-dessous comme des matériaux isotropes ?

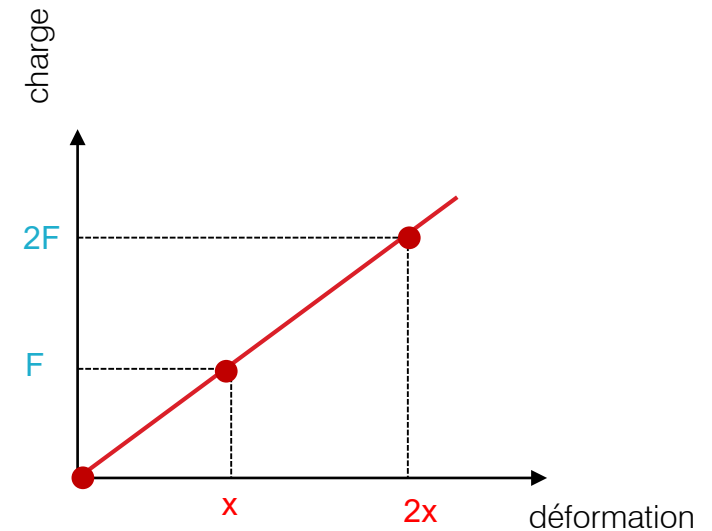
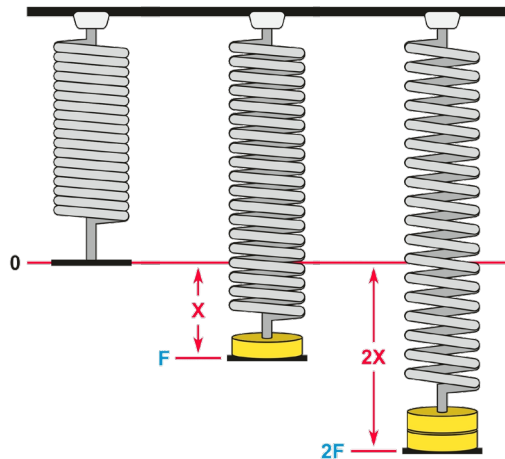


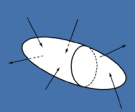


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse de *proportionnalité* : dans un solide continu, les déformations sont liées en tous points aux contraintes par des relations linéaires et homogènes.

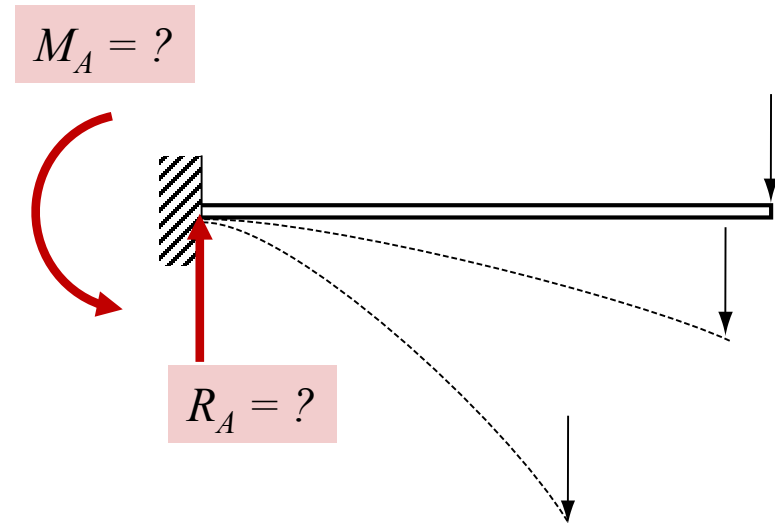


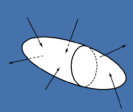


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Hypothèses fondamentales

- Hypothèse des *petites déformations* : les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.





Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

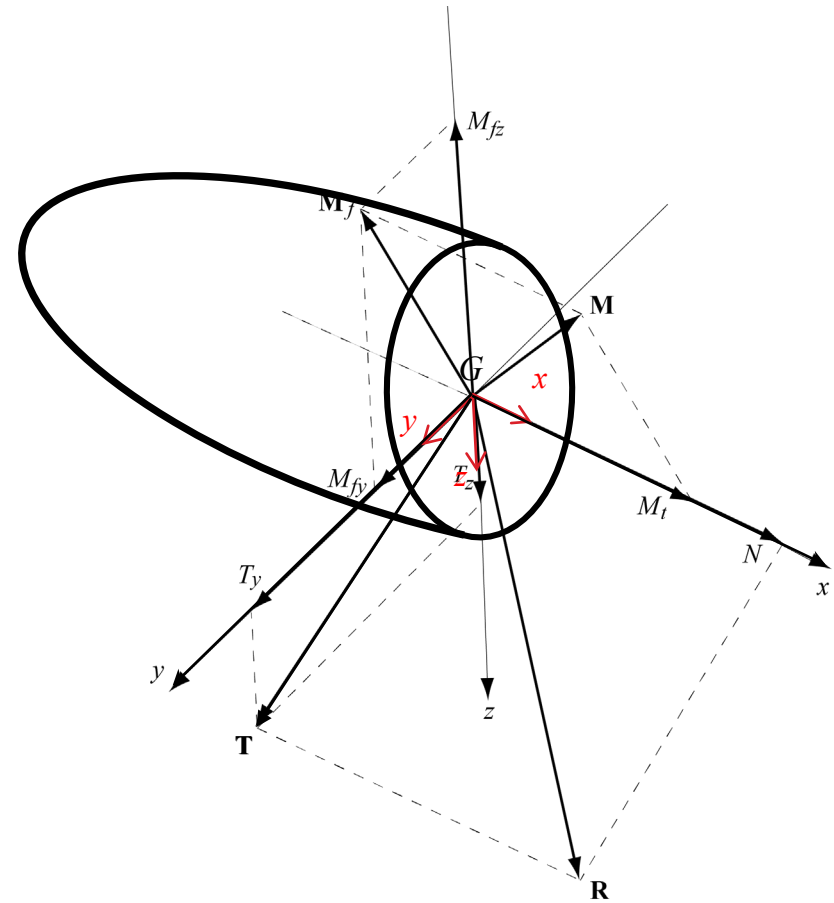
Efforts intérieurs et contraintes

Considérons un corps solide en équilibre :

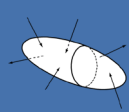
- (A) corps A
- F section plane
- G centre de gravité de la section
- R** force
- M** moment

Le **torseur des efforts intérieurs** se décompose comme suit⁽¹⁾:

- N = effort normal = **R** selon Gx
- **T** = effort tranchant = **T** = $T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}$
- M_t = moment de torsion = **M** selon Gx
- **M_f** = moment de flexion = **M_f** = $M_{fy} \mathbf{j} + M_{fz} \mathbf{k}$



⁽¹⁾ Les composantes d'un vecteur sont symbolisés par un caractère gras

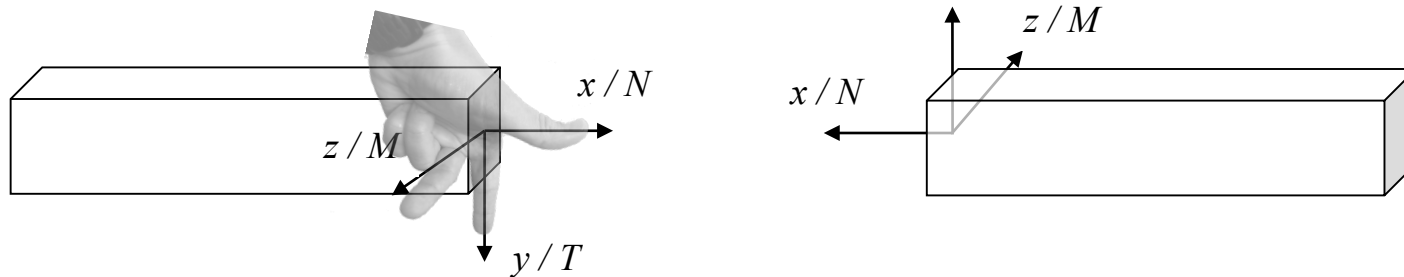


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

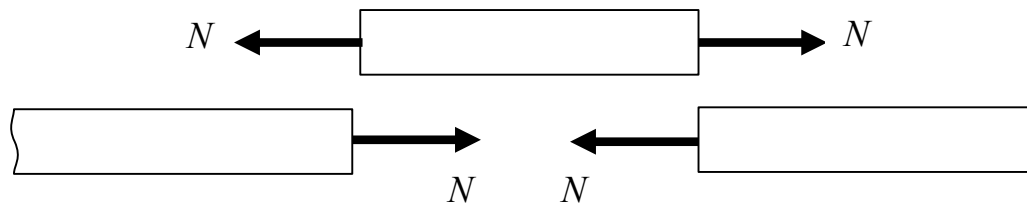
Définition des efforts intérieurs

Respecter les **conventions des signes**

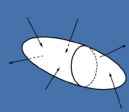
- Repère de coordonnées (gauche et droit) y/T



- On dessine par exemple la force N vers l'extérieur de la coupe



- N est positive si elle soumet le système à de la traction et négative pour la compression
- Si l'on trouve un scalaire négatif, c'est que le vecteur est dans le sens contraire de celui dessiné.



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Efforts intérieurs et contraintes

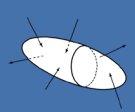
Définition des cas particuliers d'**efforts intérieurs** : projection du tenseur des efforts sur les axes principaux définis sur le corps (trièdre de référence à droite, inverse pour le corps B)

*Trièdre de référence à **droite***

- $N = \iint_F \sigma \, dF$
- $T_y = \iint_F \tau_y \, dF$
- $T_z = \iint_F \tau_z \, dF$
- $M_t = \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$
- $M_{fy} = \iint_F \sigma z \, dF$
- $M_{fz} = - \iint_F \sigma y \, dF$

*Trièdre de référence à **gauche***

- $N = \iint_F \sigma \, dF$
- $T_y = \iint_F \tau_y \, dF$
- $T_z = \iint_F \tau_z \, dF$
- $M_t = - \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$
- $M_{fy} = - \iint_F \sigma z \, dF$
- $M_{fz} = \iint_F \sigma y \, dF$

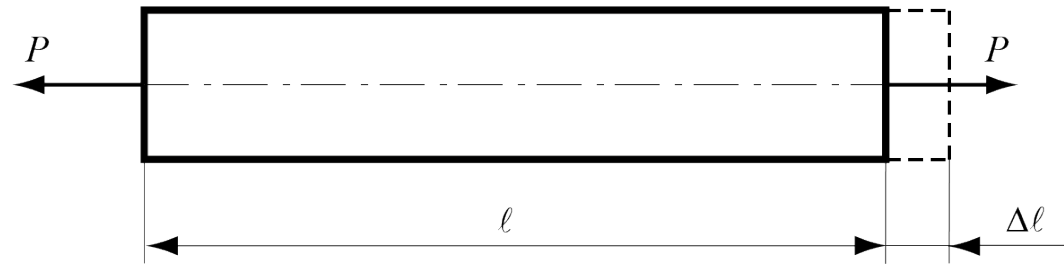


Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Constantes caractéristiques des matériaux linéaires isotropes

L'allongement $\Delta\ell$ d'un barreau prismatique de longueur ℓ et de section F sous l'effet d'une charge P est proportionnel à la charge et à la longueur, et inversement proportionnel à la section et à une constante E , appelée *module d'élasticité* ou *module de Young*, dépendant de la nature du matériau.

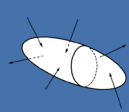
- $$\Delta\ell = \frac{P \ell}{E F} = \frac{P \ell}{F E} = \sigma \frac{\ell}{E}$$



Sous sa forme élémentaire, la *loi de Hooke* exprime cette linéarité entre contrainte et allongement constatée dans la première phase de l'essai de traction de la plupart des matériaux.

- $$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\Delta\ell}{\ell} E = \varepsilon E \quad \rightarrow \text{unité [MPa]} = \frac{[N]}{[mm^2]} = \frac{[mm]}{[mm]} [MPa]$$

On a également introduit l'allongement spécifique : $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}$



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

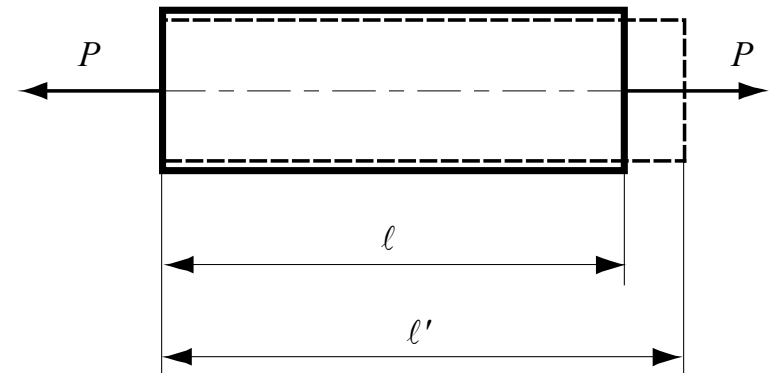
Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Dans le domaine de comportement linéaire du matériau, l'**allongement transversal relatif** d'une dimension quelconque de la section est proportionnel, mais de signe contraire, à l'allongement relatif longitudinal ε de l'éprouvette.

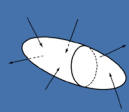
- $\varepsilon_t = -\mu \varepsilon$

Soit en introduisant la contrainte

- $\varepsilon_t = -\mu \frac{\sigma}{E}$



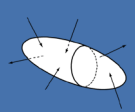
où le facteur de proportionnalité μ (noté souvent ν dans la littérature anglo-saxonne) est appelé ***coefficient de Poisson***.



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

Module d'élasticité et coefficient de Poisson

Matériau	Désignation VSM	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	μ [-]	σ_E [MPa]	σ_B [MPa]	ε_B [%]	A [10 ⁻⁶ /°C]
Aciers de construction	S 235 (Ac37-2)	7850	210	0,27	220	400	25	12
	E 295 (Ac50-2)	7850	210	0,27	280	540	19	12
	Ac50-2K (étiré à froid)	7850	210	0,27	410	720	8	12
Aciers inoxydables	X10CrNiS18 9	7900	200	0,30	200	600	35	16
	X20Cr13	7900	200	0,30	550	850	12	16
Fonte grise	GG-25	7200	100	0,25	–	2001	1	10
Aluminium	EN AW-Al 99.5 O	2700	69	0,33	25	80	30	24
Alliages d'aluminium	EN AW-Al MgSi T6	2700	70	0,33	250	280	10	23
	EN AW-Al Zn4.5Mg1 T62	2770	73	0,33	320	390	9	23
	EN AW-Al Cu4Mg1 T63	2790	72	0,33	570	630	9	23
Cuivre recuit	–	8900	120	0,35	40	210	50	17
Alliages cuivre-zinc4	G-CuZn33Pb2 (coulé)	8500	80	0,34	50	180	55	18



Chapitre 1 : Équilibre intérieur d'un solide

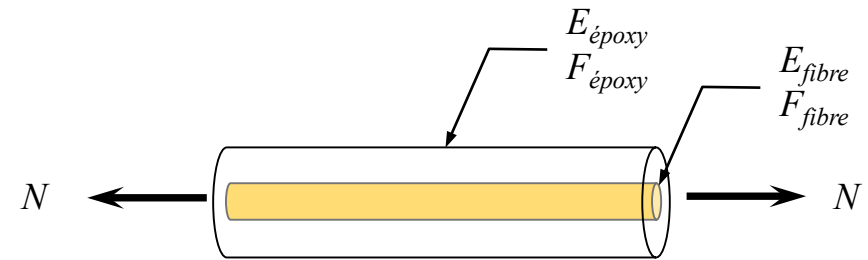
Constantes caractéristiques des matériaux linéaires isotropes

Rigidité d'une barre

- $k = \frac{N}{\Delta l} = \frac{F E}{l}$

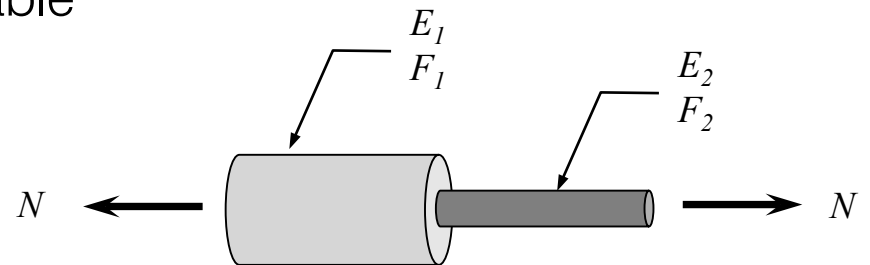
Application pour un matériau composite unidirectionnel

- $\Delta l = \Delta l_{fibre} = \Delta l_{\text{époxy}} = \frac{N_i}{k_i} = \frac{N_i l}{F_i E_i}$
- $k_{tot} = \sum k_i = \frac{N_{fibre} + N_{\text{époxy}}}{\Delta l} = \frac{\sum F_i E_i}{l}$
- $N_{tot} = N_{fibre} + N_{\text{époxy}}$



Application pour une barre de diamètre variable

- $\Delta l_i = \frac{N}{k_i} = \frac{N l_i}{F_i E_i}$
- $\Delta l_{tot} = \sum \Delta l_i = \frac{N}{k_{tot}}$
- $k_{tot} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1}$



Annexe III : Moment d'une aire plane

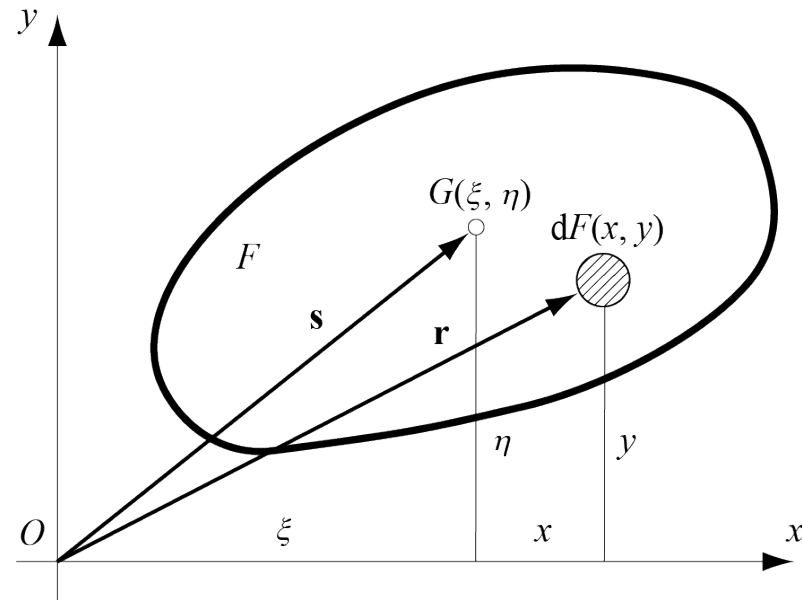
Moment du premier ordre

La connaissance des moments statiques permet de déterminer la position \mathbf{s} du *centre d'inertie* G de l'aire, ainsi que ses deux composantes ξ et η

- $\mathbf{s} = \frac{\iint_F \mathbf{r} dF}{\iint_F dF} = \frac{\mathbf{S}}{F}$ [m]

- $\xi = \frac{\iint_F x dF}{\iint_F dF} = \frac{S_y}{F}$ [m]

- $\eta = \frac{\iint_F y dF}{\iint_F dF} = \frac{S_x}{F}$ [m]

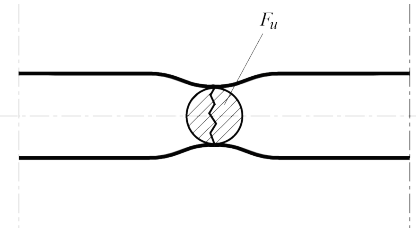
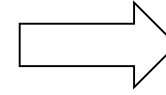
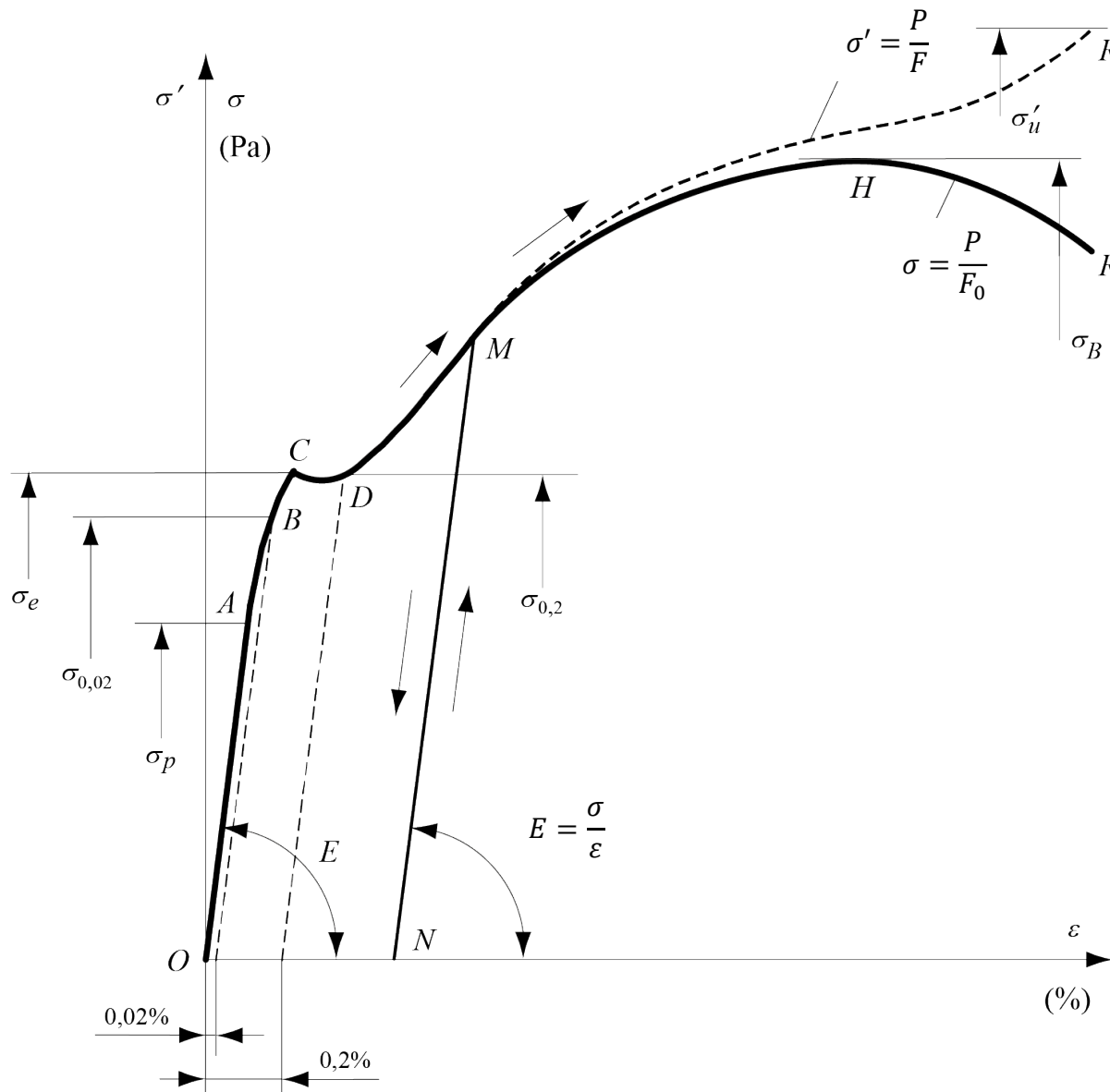


Les moments S_x et S_y sont nuls lorsque les axes passent par le centre d'inertie G ($\xi = \eta = 0$)

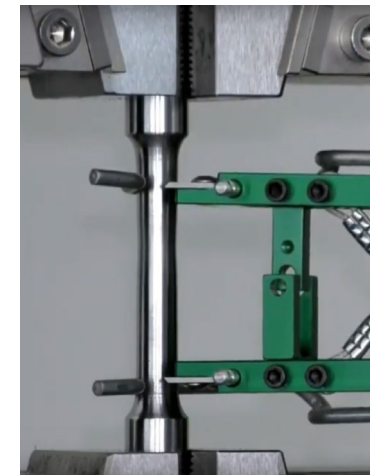


Annexe I : Propriété mécaniques des matériaux

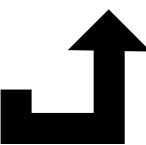
Essai de traction



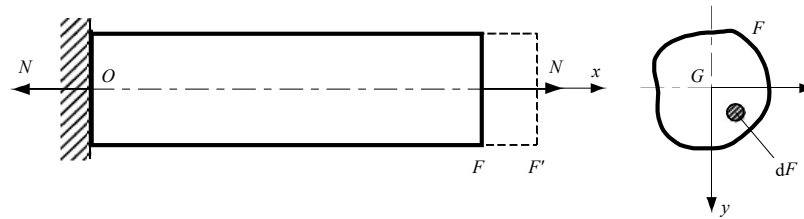
phénomène de striction



https://www.youtube.com/watch?v=RY9X_O8is-k



Mécanique des structures



Chapitre 2: Traction ou compression simple

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL



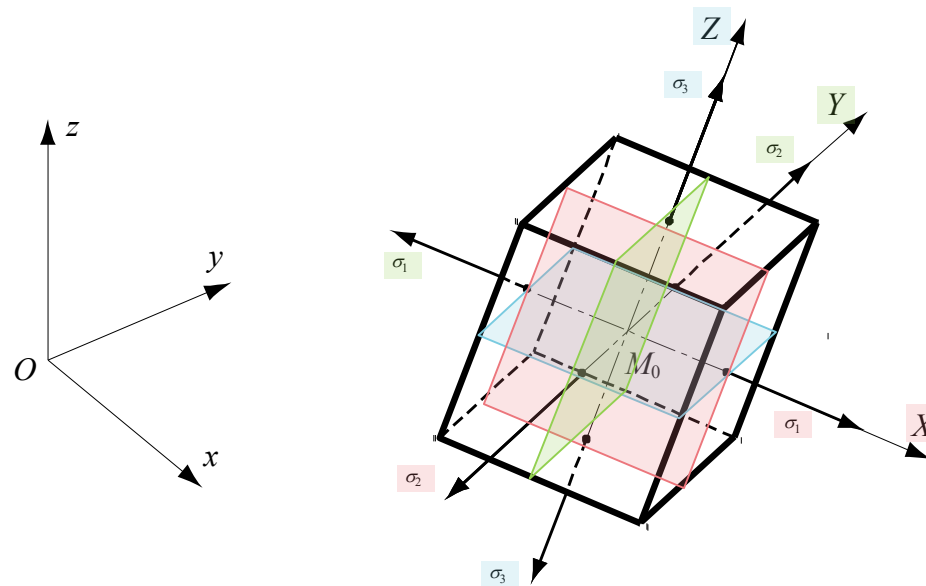


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Un point M_0 quelconque d'un solide, il existe toujours au moins trois plans normaux deux à deux sur lesquels les contraintes tangentielles sont nulles et les contraintes normales extrema :

- les **plans principaux** sont les plans sur lesquels les contraintes tangentielles sont nulles et les contraintes normales extrema
- les **contraintes principales** sont les contraintes normales agissant sur les plans principaux
- les **axes principaux** ou directions principales sont les axes normaux aux plans principaux au point considéré et sont les supports des contraintes principales.



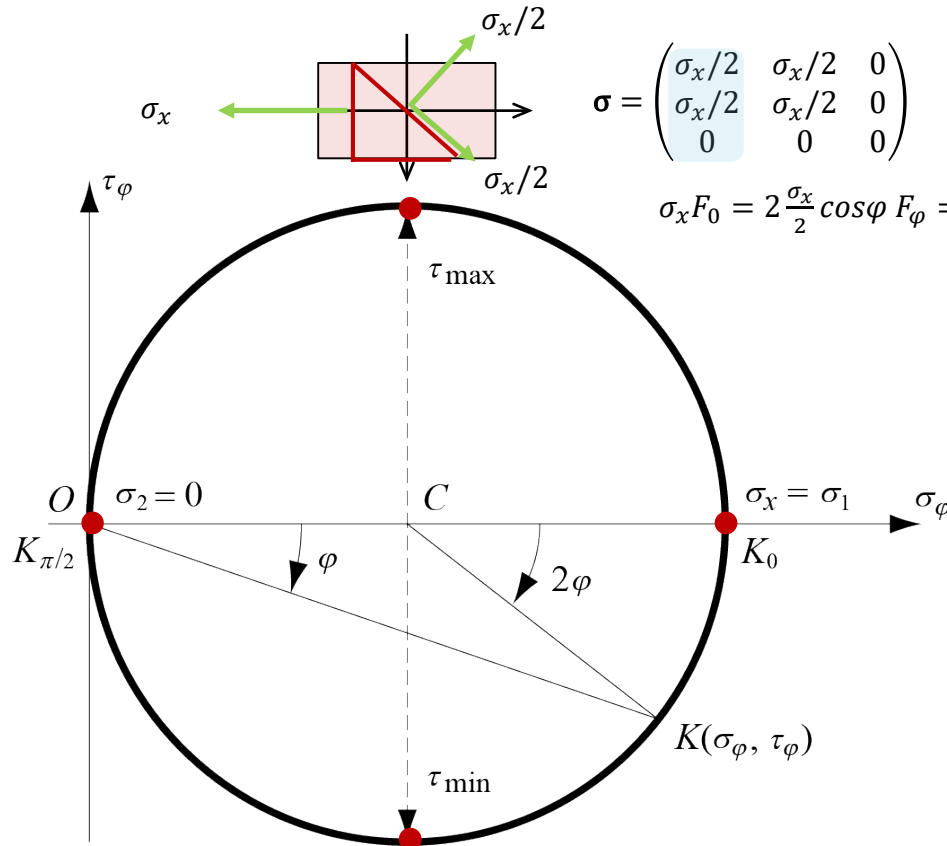
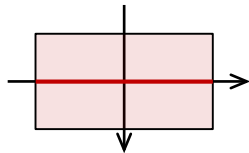
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

On reconnaît les équations paramétriques d'un cercle, appelé *cercle de Mohr*, centré au point $(\sigma_x/2, 0)$ et de rayon $\sigma_x/2$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

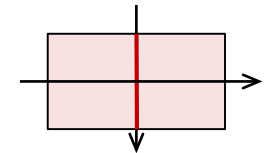
$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



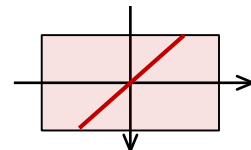
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ \sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x F_0 = 2 \frac{\sigma_x}{2} \cos \varphi F_\varphi = 2 \frac{\sigma_x}{2} \cos \varphi F_0 / \cos \varphi = \sigma_x F_0$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x/2 & -\sigma_x/2 & 0 \\ -\sigma_x/2 & \sigma_x/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



NOTE

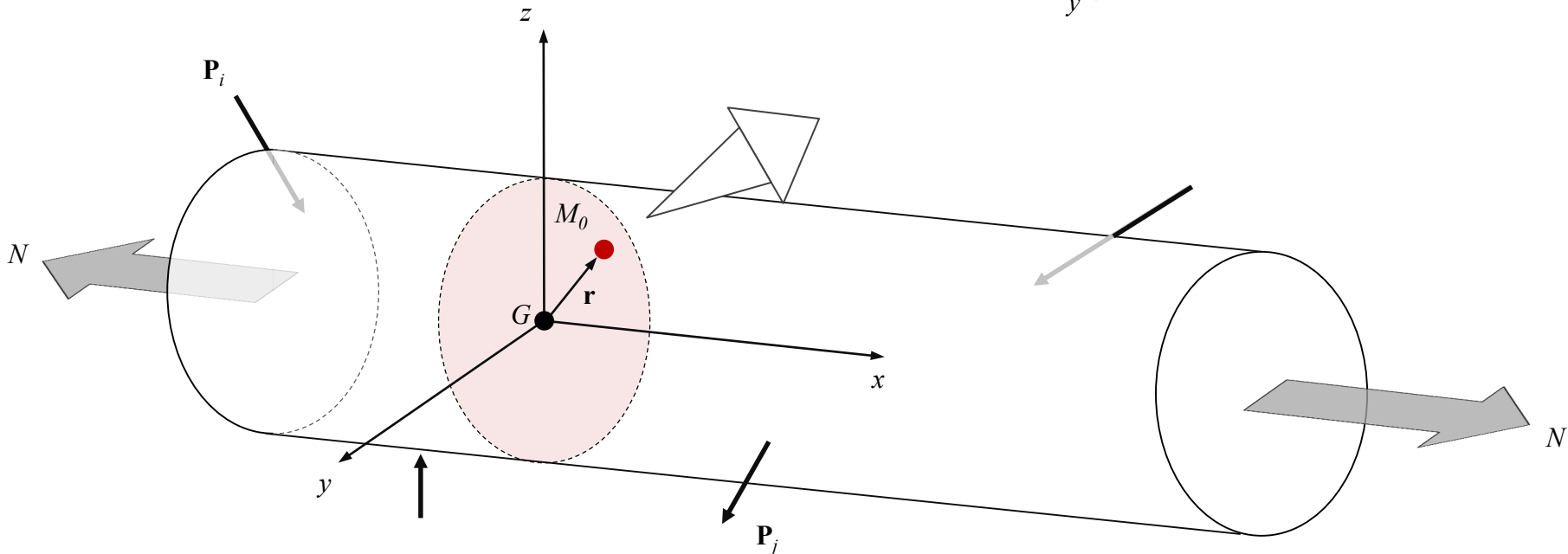
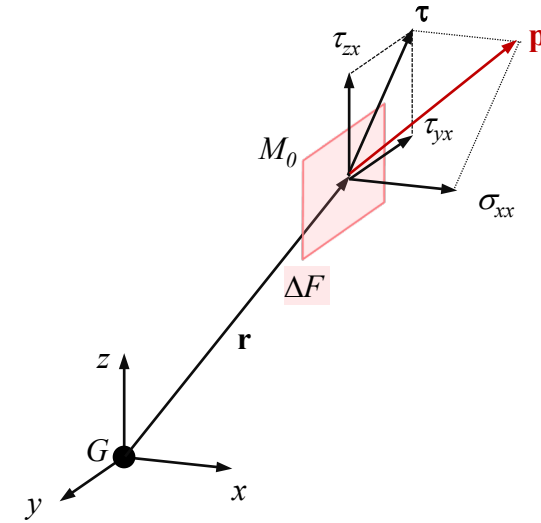
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Etat de contrainte au point M_0

- $\mathbf{p}(M_0) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

- Traction $\rightarrow \mathbf{p}_x(M_0(N)) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = N/F \\ \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{zx} = 0 \end{pmatrix}$



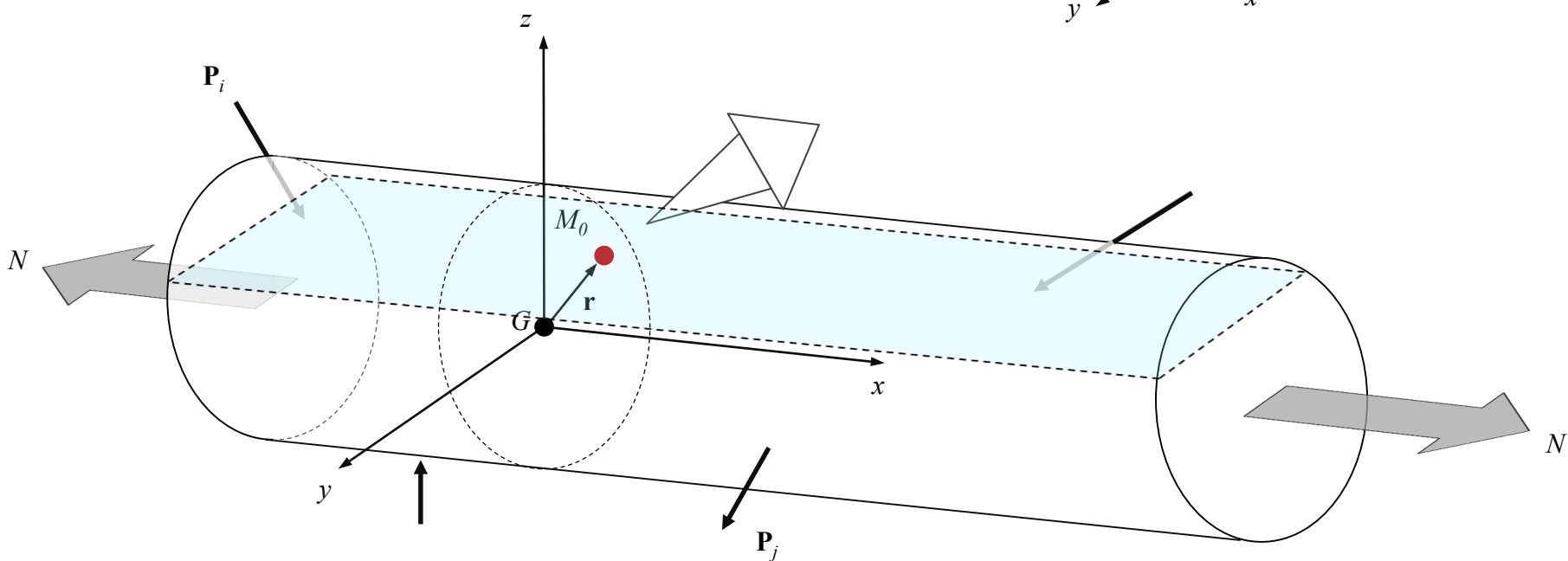
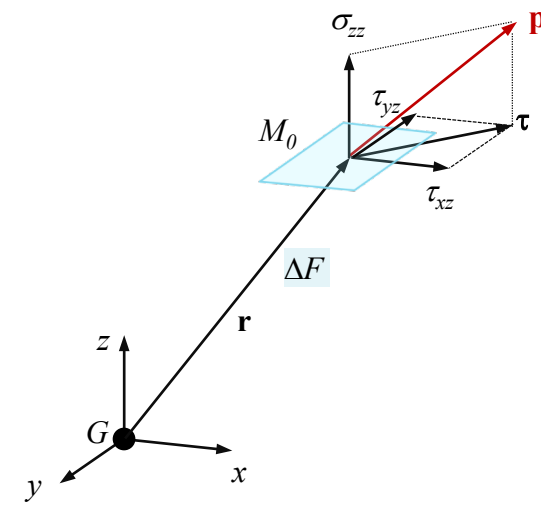
Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Etat de contrainte au point M_0

- $\mathbf{p}(M_0) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$

- Traction $\rightarrow \mathbf{p}_x(M_0(N)) = \begin{pmatrix} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{pmatrix}$

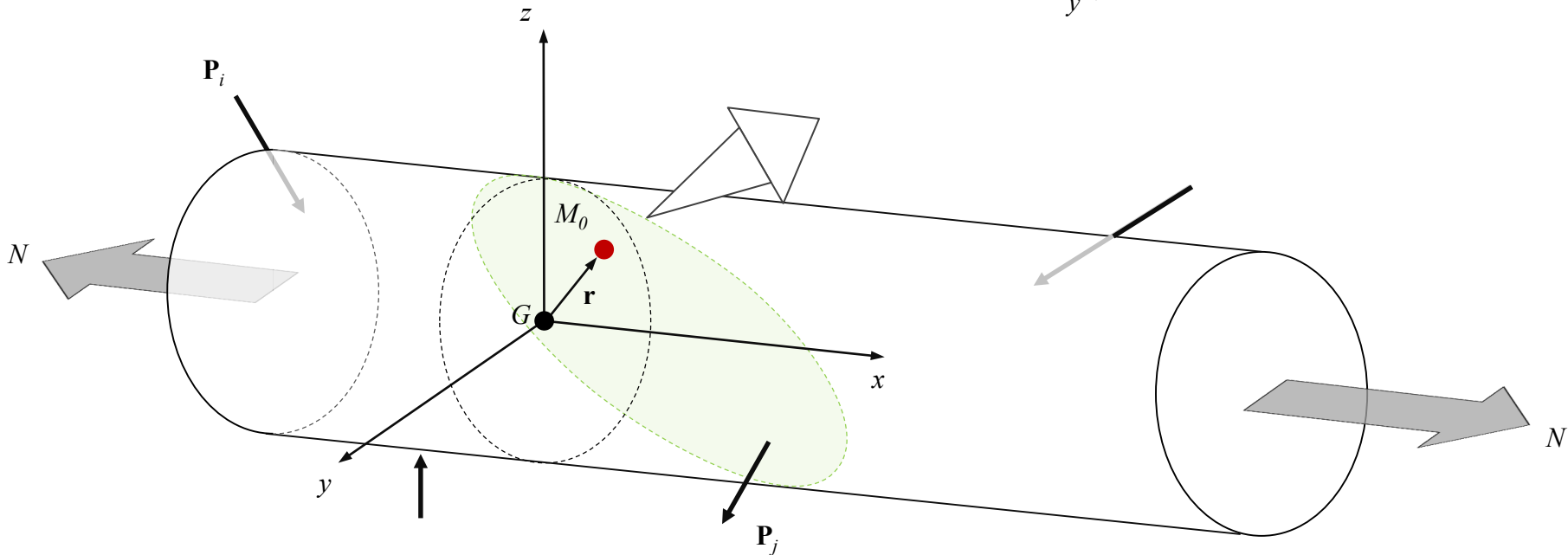
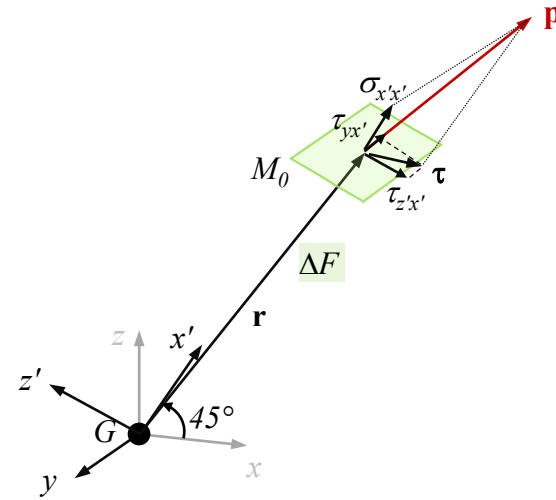


Chapitre 2 : Traction ou compression simple

Analyse de l'état de contrainte en traction ou compression simple

Etat de contrainte au point M_0

- Traction $\rightarrow \mathbf{p}_{45^\circ}(M_0(N)) = \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} = \sigma_{xx}/2 \\ \tau_{yx'} = 0 \\ \tau_{z'x'} = \sigma_{xx}/2 \end{pmatrix}$



Dans le domaine élastique, l'*énergie de déformation* est rendue par le solide quand la force extérieure revient à sa valeur initiale. (suffisamment lentement pour que les effets dynamiques internes soient négligeables)

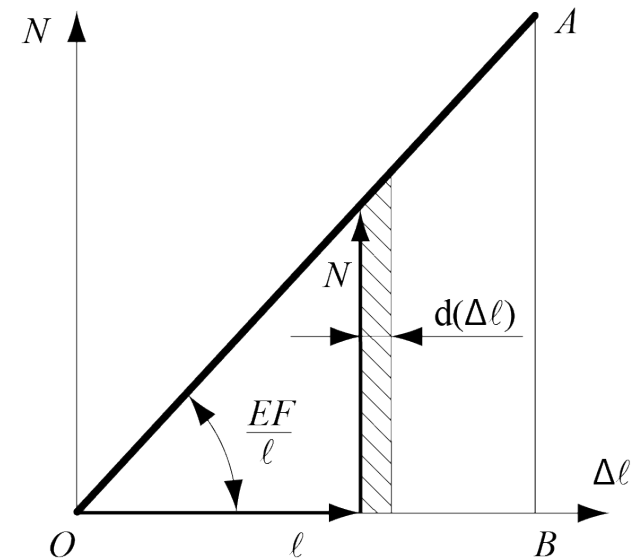
L'énergie élastique pour le barreau entier a pour valeur :

$$\bullet \quad U = \int_0^{\Delta\ell} dU = \int_0^{\Delta\ell} N d(\Delta\ell) = \frac{EF}{\ell} \int_0^{\Delta\ell} \Delta\ell d(\Delta\ell) = \frac{EF(\Delta\ell)^2}{2\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell} EF \frac{\Delta\ell}{2} = N \frac{\Delta\ell}{2} = \frac{N^2 \ell}{2EF}$$

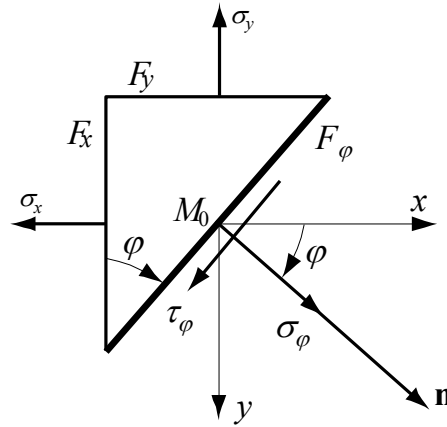
\uparrow $dU = N d(\Delta\ell)$ \uparrow $N = \frac{\Delta\ell EF}{\ell}$

Un calcul identique au précédent permet de trouver les trois formes suivantes de la densité d'énergie :

$$\bullet \quad u = \frac{U}{V} = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\varepsilon \sigma}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$



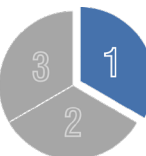
Mécanique des structures



Chapitre 3: État de contrainte bidimensionnel

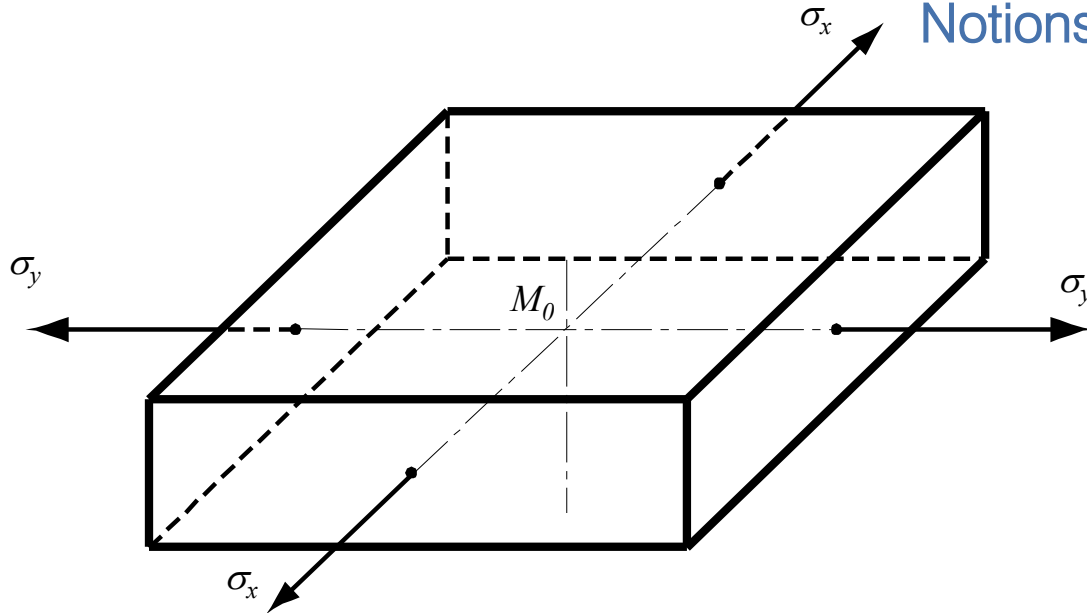
Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

Notions générales : Principe de superposition



	Allongement selon M_{0x}	Allongement selon M_{0y}	Allongement selon M_{0z}
Effet de σ_x	$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{yx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$\varepsilon_{zx} = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$
Effet de σ_y	$\varepsilon_{xy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$	$\varepsilon_{zy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$
Somme	$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y)$	$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x)$	$\varepsilon_z = \frac{-\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$

Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

État de contrainte pour axes de référence **différents** des axes principaux

Contraintes dans une section oblique lorsque σ_x et σ_y ne sont pas principales.

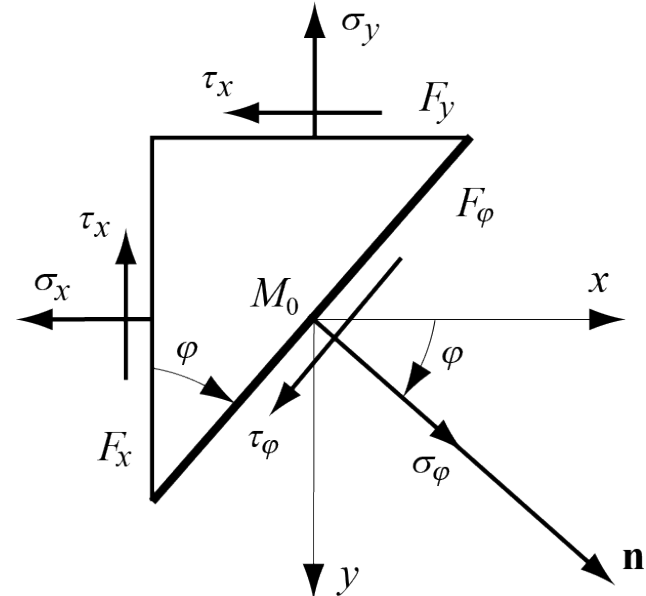
- $\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_x \sin \varphi \cos \varphi$
- $\tau_\varphi = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_x (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$

L'insertion de l'angle 2φ permet d'expliciter ces relations sous la forme

- $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_x \sin 2\varphi$
- $\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_x \cos 2\varphi$

Qui peut aussi s'écrire

- $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2(\varphi - \varphi_0)$
- $\tau_\varphi = -R \sin 2(\varphi - \varphi_0)$
- $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$
- $\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$



Chapitre 3 : État de contrainte bidimensionnel

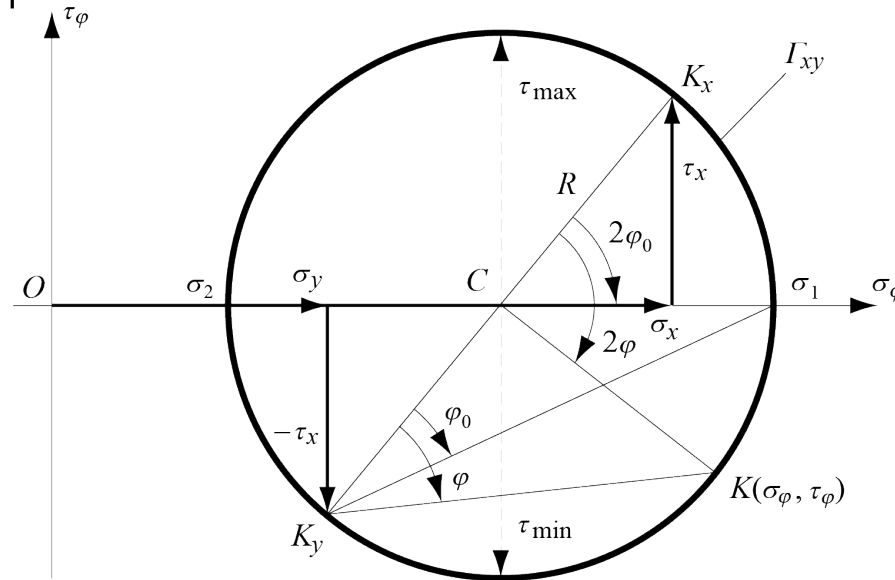
État de contrainte pour axes de référence **différents** des axes principaux

On retrouve l'équation du cercle fondamental de l'état de contrainte bidimensionnel. Il est cette fois compris entre les contraintes principales

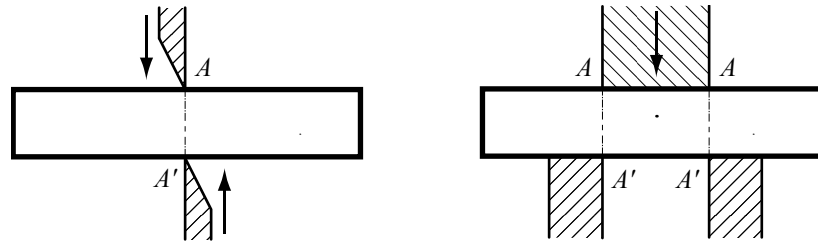
- $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$ avec $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$
- $\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$

Le fait que la contrainte normale est extremum quand la contrainte tangentielle est nulle est vérifié par les équations précédentes. En effet, la dérivation de la première équation par rapport à l'angle 2φ permet d'écrire

- $\frac{d\sigma_\varphi}{d(2\varphi)} = \tau_\varphi$



Mécanique des structures



Chapitre 4 : Cisaillement simple

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL

Somme des forces et des moments autour de l'axe Gz

- $\sum T_y = \tau_{xy} dydz - \tau_{-x-y} dydz = 0$

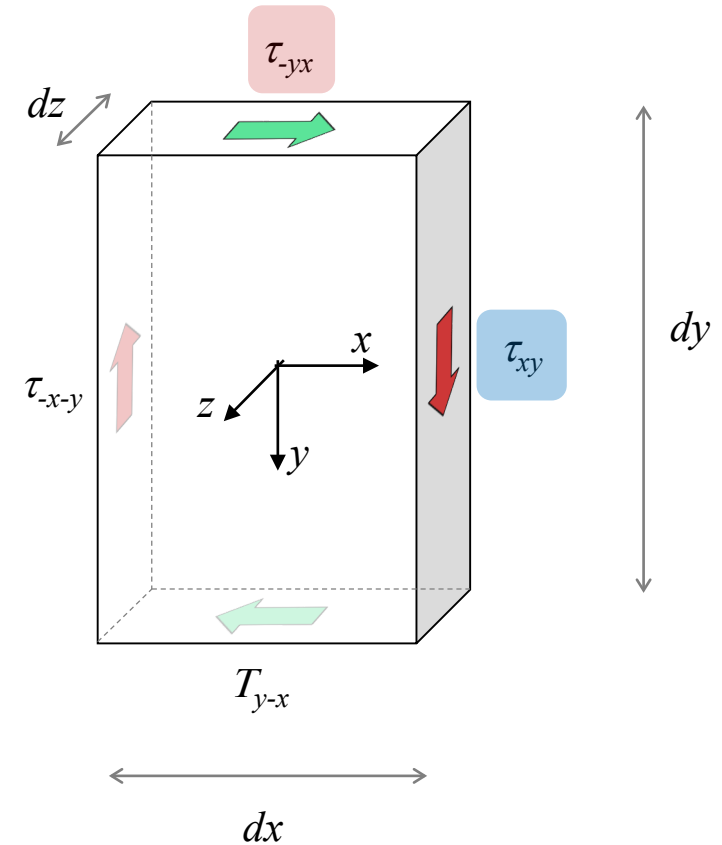
- $\tau_{xy} = \tau_{-x-y}$

- $\sum T_x = \tau_{y-x} dxdz - \tau_{-yx} dxdz = 0$

- $\tau_{y-x} = \tau_{-yx}$

- $\sum M_z = 2 \tau_{xy} dydz \cdot dx/2 + 2 \tau_{-yx} dxdz \cdot dy/2 = 0$

- $\tau_{xy} = -\tau_{-yx}$



Déformation en cisaillement simple

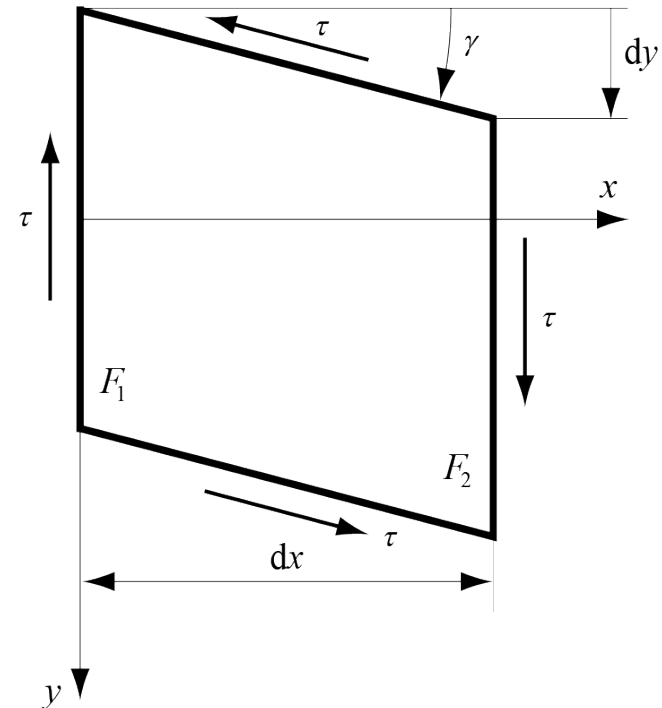
Considérons un élément de matière de longueur dx compris entre deux sections F_1 et F_2 infiniment proches, le moment de flexion $T \, dx$ étant ainsi négligeable en comparaison de l'effort tranchant T .

Par rapport à la face F_1 supposée fixe, la section F_2 est décalée d'une distance dy proportionnelle à dx et à la contrainte de cisaillement τ

- $dy = \frac{1}{G} dx \cdot \tau$

Dans cette expression, le rapport $dy/dx = \gamma$ est l'*angle de glissement* et le facteur de proportionnalité G est le *module de glissement*, ces deux coefficients étant par conséquent liés par la relation

- $\gamma = \frac{\tau}{G}$



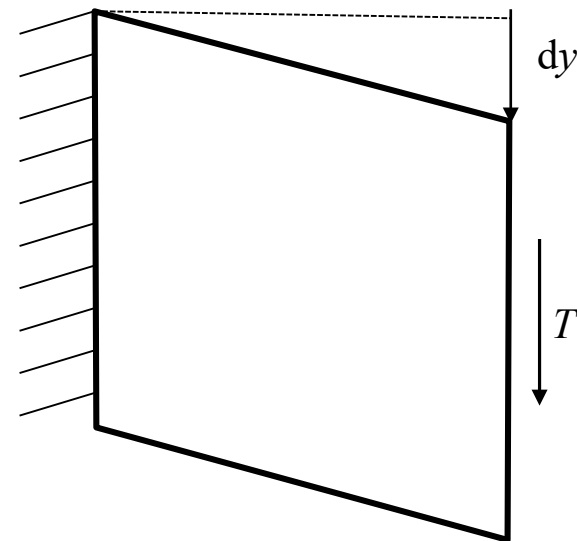
L'énergie de déformation en cisaillement simple équivaut au demi-produit de l'effort tranchant T par le glissement dy de la section F

- $$dU = \frac{1}{2} T dy = \frac{1}{2} \tau F \cdot \gamma dx = \frac{1}{2} \tau \gamma dV = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$$

\swarrow
 $\gamma = \frac{\tau}{G}$

En divisant par l'élément de volume dV et en introduisant le module de glissement on établit les trois expressions suivantes de la densité d'énergie en cisaillement simple

- $$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G \gamma^2}{2} = \frac{\tau \gamma}{2}$$



Chapitre 4 : Cisaillement simple

Module de Young et module de glissement

Comme l'angle α est très petit, les triangles $AA'A''$ et ACD sont semblables

- $AA' = \sqrt{2} A'A''$

$$AA' = dx \gamma = dx \frac{\tau}{G}$$

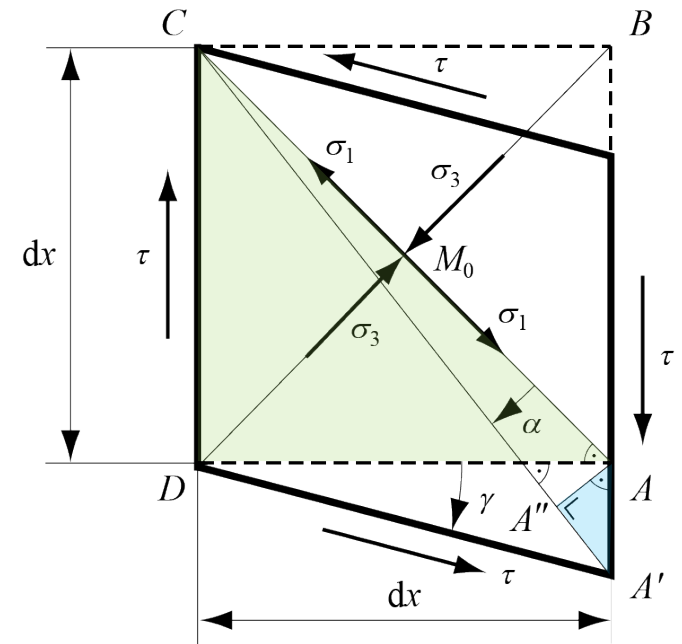
$$A'A'' = AC \varepsilon = dx \sqrt{2} \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_3) = dx \sqrt{2} \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$$

Cette condition entraîne l'égalité suivante

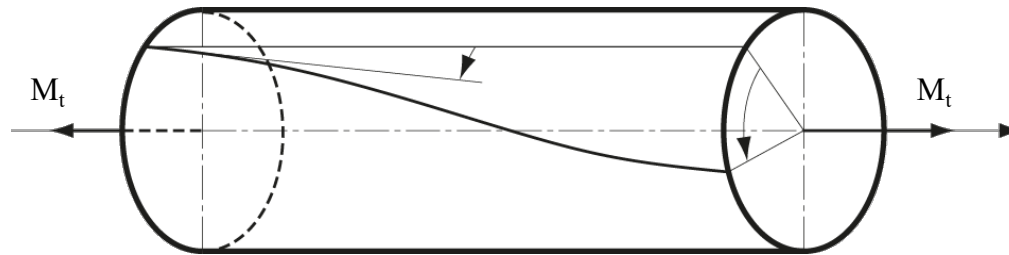
- $dx \frac{\tau}{G} = \sqrt{2} dx \sqrt{2} \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$

Et, par conséquent, le lien entre les modules E et G a pour expression

- $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$



Mécanique des structures

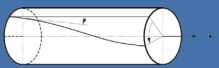


Chapitre 5 : Torsion simple

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL





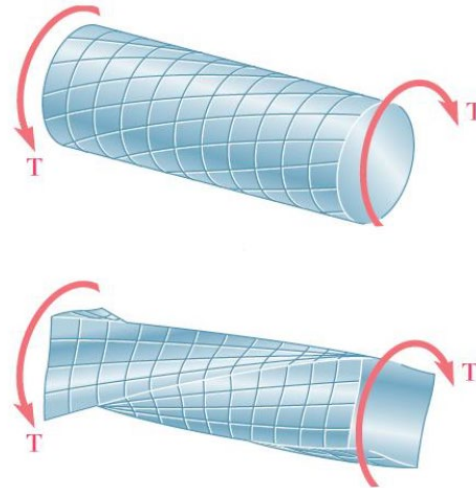
Chapitre 5 : Torsion simple

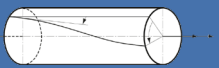
Introduction

Les **sections planes restent planes** en torsion seulement pour les corps avec une symétrie axiale infinie (comme les barres circulaires et les tubes).

Dans une barre avec une section carré / rectangulaire, il n'y a pas de telle symétrie et les sections transversales vont se déformer.

Il est faux d'assumer que la contrainte de cisaillement dans une barre rectangulaire varie linéairement avec la distance, la contrainte est en fait zéro dans les coins et non maximum.





Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'intégrale constitue le moment d'inertie polaire I_p de la section

- $I_p = \iint_F r^2 dF$

Ce qui permet de définir la constante k comme étant

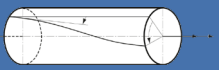
- $k = \frac{M_t}{I_p}$

Ce qui permet d'explicité la contrainte τ sous la forme

- $\tau = k r = \frac{r M_t}{I_p}$

L'état de contrainte de la torsion circulaire est donc un *cisaillement pur*, mais la contrainte tangentielle τ varie en intensité et direction. Sa valeur maximale apparaît sur la surface extérieure du barreau

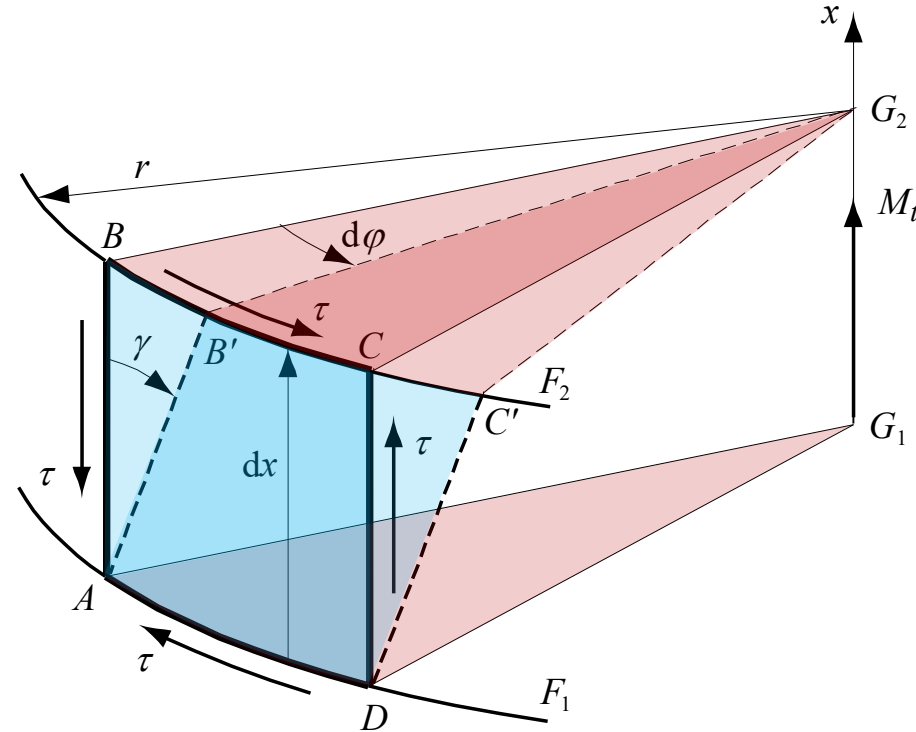
- $\tau_{max} = \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}$

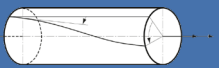


Chapitre 5 : Torsion simple

Déformation en torsion circulaire

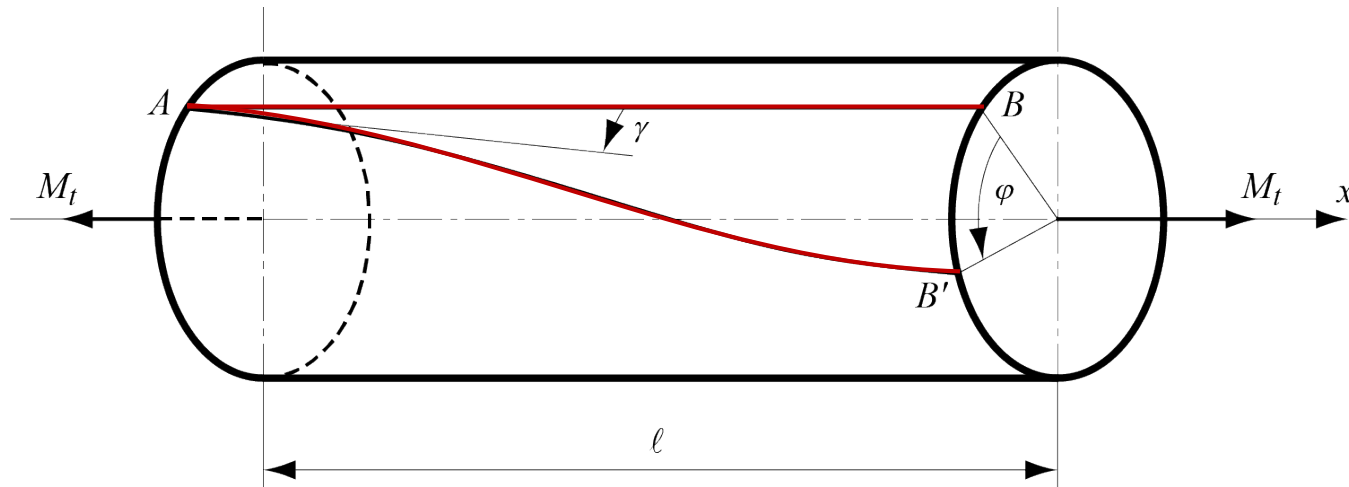
Considérons un carré $ABCD$ compris entre deux sections voisines F_1 et F_2 , distantes de dx . La section F_1 étant supposée fixe, le carré se transforme en un losange $AB'C'D$, conformément aux résultats trouvés pour le cisaillement simple





Chapitre 5 : Torsion simple

Déformation en torsion circulaire



Si le moment de torsion est constant sur une longueur ℓ , une génératrice AB du cylindre se transforme en une hélice AB' et l'intégration de la relation donne la déformation angulaire totale ou *angle de torsion*

- $$\varphi = \frac{M_t \ell}{G I_p}$$

Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre

Les *moments du second* ordre d'une aire plane F du plan Oxy , constitués du *moment d'inertie polaire* par rapport à l'origine O , des *moments d'inertie* par rapport aux axes Ox et Oy , ainsi que du *moment centrifuge*, sont définis par les expressions respectives

- $I_p = \iint_F r^2 dF$ [m⁴]
- $I_x = \iint_F y^2 dF$ [m⁴]
- $I_y = \iint_F x^2 dF$ [m⁴]
- $I_{xy} = \iint_F xy dF$ [m⁴]

où r dénote le module du vecteur-lieu \mathbf{r}

Il est à relever qu'en vertu de la liaison géométrique $r^2 = x^2 + y^2$, le moment d'inertie polaire I_p est lié aux moments d'inertie I_x et I_y par la relation : $I_p = I_x + I_y$



Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre : surface rectangulaire

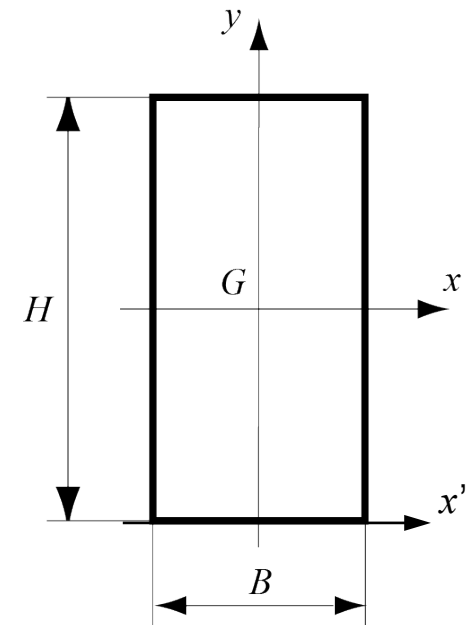
Le calcul par intégration du moment du second ordre d'un rectangle par rapport à l'axe x passant par le centre de gravité

- $$I_x = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 dF$$
$$= x \Big|_{-B/2}^{B/2} \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-H/2}^{H/2} = \frac{BH^3}{12}$$

- $$I_{x'} = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=0}^H y^2 dF = \frac{BH^3}{3}$$

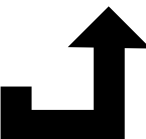
Approche discrète

- $$I_{x'} = I_x + \sum y^2 F = \frac{BH^3}{12} + \frac{H^2}{4} BH = \frac{BH^3}{3}$$



NOTE

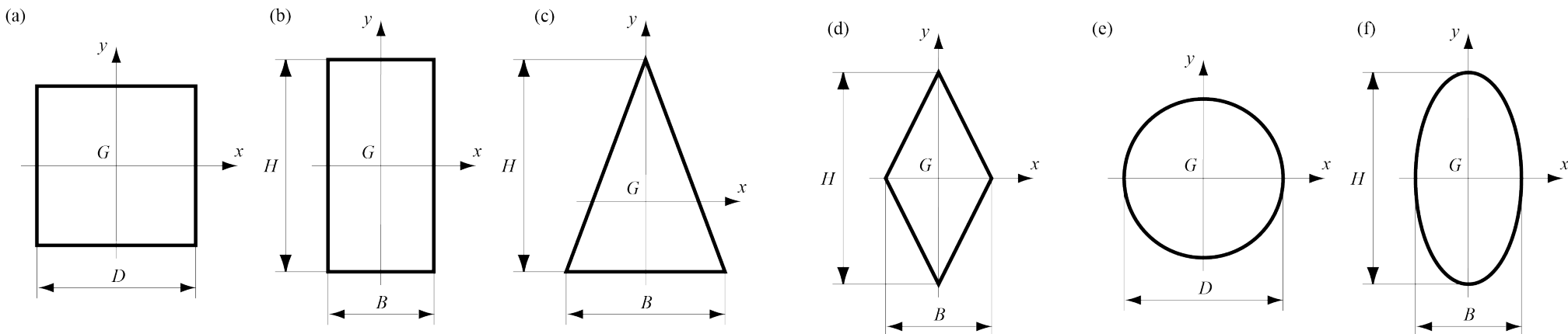
I_x



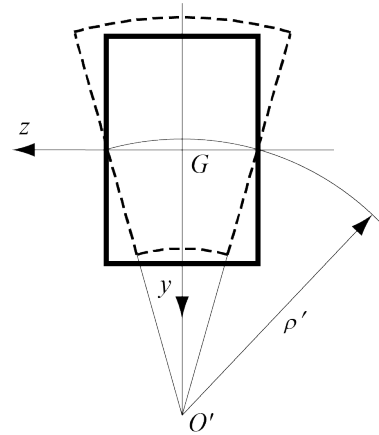
Annexe III Moment d'une aire plane

Moment du second ordre

Forme de l'aire	I_p m ⁴	I_x m ⁴	I_y m ⁴	I_{xy} m ⁴
(a) Carré de côté D	$\frac{D^4}{6}$	$\frac{D^4}{12}$	$\frac{D^4}{12}$	0
(b) Rectangle de largeur B et hauteur H	$\frac{BH}{12}(B^2 + h^2)$	$\frac{BH^3}{12}$	$\frac{HB^3}{12}$	0
(c) Triangle isocèle de base B et hauteur H	$\frac{BH}{144}(3B^2 + 4h^2)$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(d) Losange de diamètres B et H	$\frac{BH}{48}(B^2 + h^2)$	$\frac{BH^3}{48}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(e) Cercle de diamètre D	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	0
(f) Ellipse d'axes B et H	$\frac{\pi BH}{64}(B^2 + h^2)$	$\frac{\pi BH^3}{64}$	$\frac{\pi HB^3}{64}$	0



Mécanique des structures



Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL



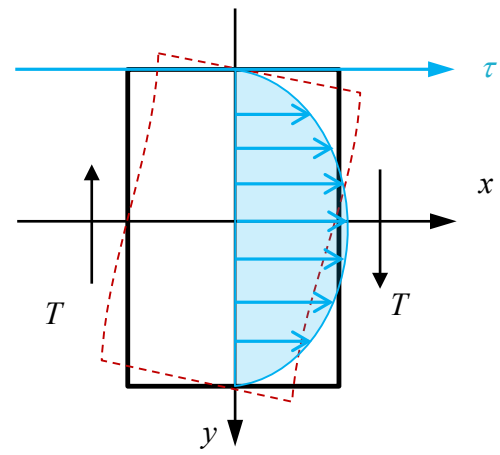


Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

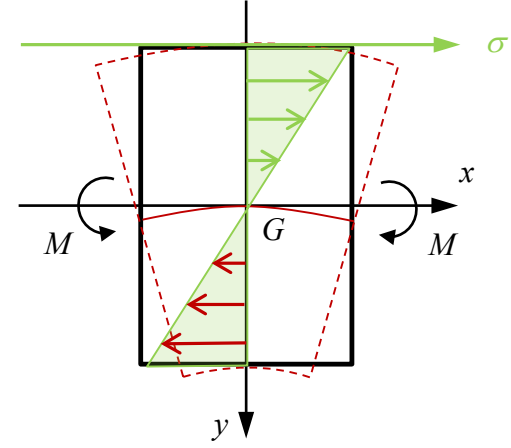
Introduction

- Les poutres sont des éléments structuraux qui ont une dimension beaucoup plus longue que les deux autres
- La déflexion y de la poutre est une fonction de la coordonnées selon la dimension la plus longue x
- Une poutre se déforme latéralement sous l'effet de force perpendiculaire à la poutre $T(x)$ et de moment de flexion $M(x)$

$$\tau = \frac{T S'}{I_z b}$$



$$\sigma(y) = \frac{y M_z}{I_z}$$





Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Contraintes normales en flexion pure

Pour que la section F' se déduise de F par une simple rotation, il faut que le déplacement d'un point soit proportionnel à sa distance y à l'axe Gz .

L'équation (f) devient alors

$$\bullet \quad M_{fz} = \iint_F \sigma y \, dF = k \underbrace{\iint_F y^2 \, dF}_{I_z}$$

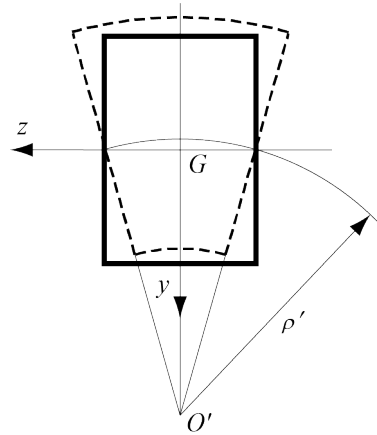
où l'intégrale n'est rien d'autre que le moment d'inertie $I_z = I$ de la section par rapport à l'axe principal Gz , ce qui permet d'exprimer la constante k comme

$$\bullet \quad k = \frac{M}{I}$$

De sorte que la contrainte s'exprime alors comme :

$$\bullet \quad \sigma = yk = \frac{yM}{I}$$

Mécanique des structures



Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Pr. Shea & Dr Prenleloup
SGM BA3 2025-2026

EPFL





Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Contrainte tangentielle en flexion simple

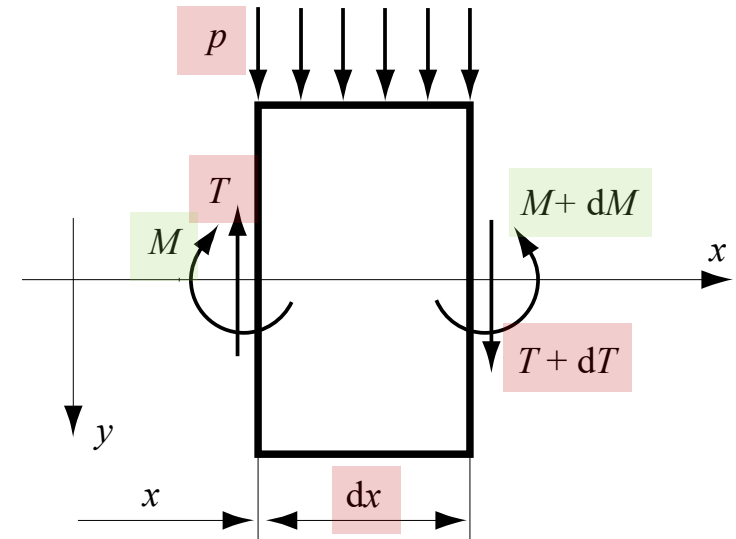
Quand le moment de flexion M varie le long de la poutre, il s'accompagne nécessairement d'un effort tranchant $T = \frac{dM}{dx}$.

L'équilibre des forces et des moments sur un élément infinitésimal d'une poutre conduit aux deux équations :

- $-T + p \, dx + (T + dT) = 0$
- $-M - T \, dx + p \, dx \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$

Ce qui permet d'exprimer (flexion simple \neq pure)

- $p = -\frac{dT}{dx}$
- $T = \frac{dM}{dx}$



p dénote la charge répartie, uniforme ou non, sur la poutre



Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

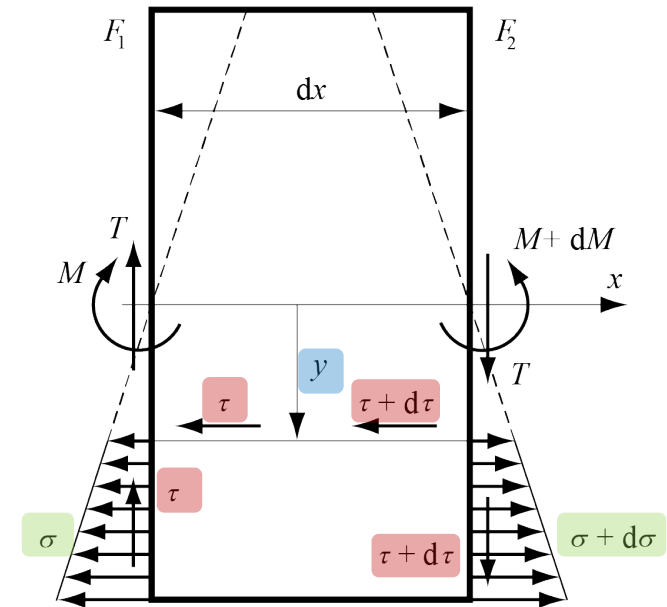
Contrainte tangentielle en flexion simple

L'effort tranchant provoque des contraintes tangentielles dans la section (mais n'a que peu d'influence sur les contraintes normales)

Afin d'établir la distribution des contraintes tangentielles en flexion (simple) considérons à nouveau les deux sections voisines F_1 et F_2 .

À une distance y de l'axe neutre les contraintes normales sur ces faces sont respectivement σ et $\sigma + d\sigma$

Les contraintes tangentes associées τ et $\tau + d\tau$ apparaissent simultanément sur les faces verticales et la face horizontale de largeur b (voir slide suivante)





Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Contrainte tangentielle en flexion simple

L'équilibre des force selon l'axe Gx de l'élément de poutre de section F' et de longueur dx

- $$-\iint_{F'} \sigma dF' + \iint_{F'} (\sigma + d\sigma) dF' - b dx \left(\tau + \frac{d\tau}{2} \right) = 0$$

En négligeant l'infiniment petit du second ordre $dx d\tau$

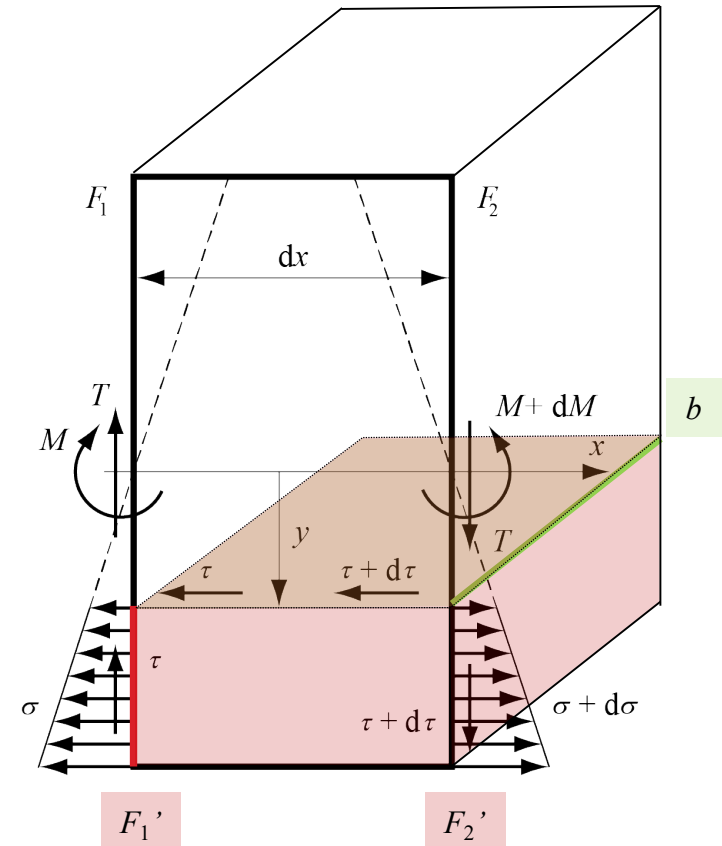
- $$b \tau dx = \iint_{F'} d\sigma dF'$$

La dérivation de $\sigma = \frac{yM}{I}$ par la variable x en tenant compte de l'invariabilité de y ($dy = 0$)

- $$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial y} dy = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx = \frac{y}{I} \frac{dM}{dx} dx$$

En introduisant $T = \frac{dM}{dx}$

- $$d\sigma = \frac{y}{I} T dx$$





Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Contrainte tangentielle en flexion simple

L'insertion de cette dernière égalité dans l'équation liant la contrainte normale avec la contrainte de cisaillement permet d'écrire

- $b \tau dx = \iint_{F'} d\sigma dF' = \iint_{F'} \frac{y}{I} T dx dF'$

Et donc

- $\tau = \frac{T}{I b} \iint_{F'} y dF'$



Théorie du cisaillement
limitée mais suffisante

On définit alors le moment statique de la section partielle

- $S' = \iint_{F'} y dF'$

Et la contrainte tangentielle devient

- $\tau = \frac{T S'}{I b}$



Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Analyse de l'état de contrainte

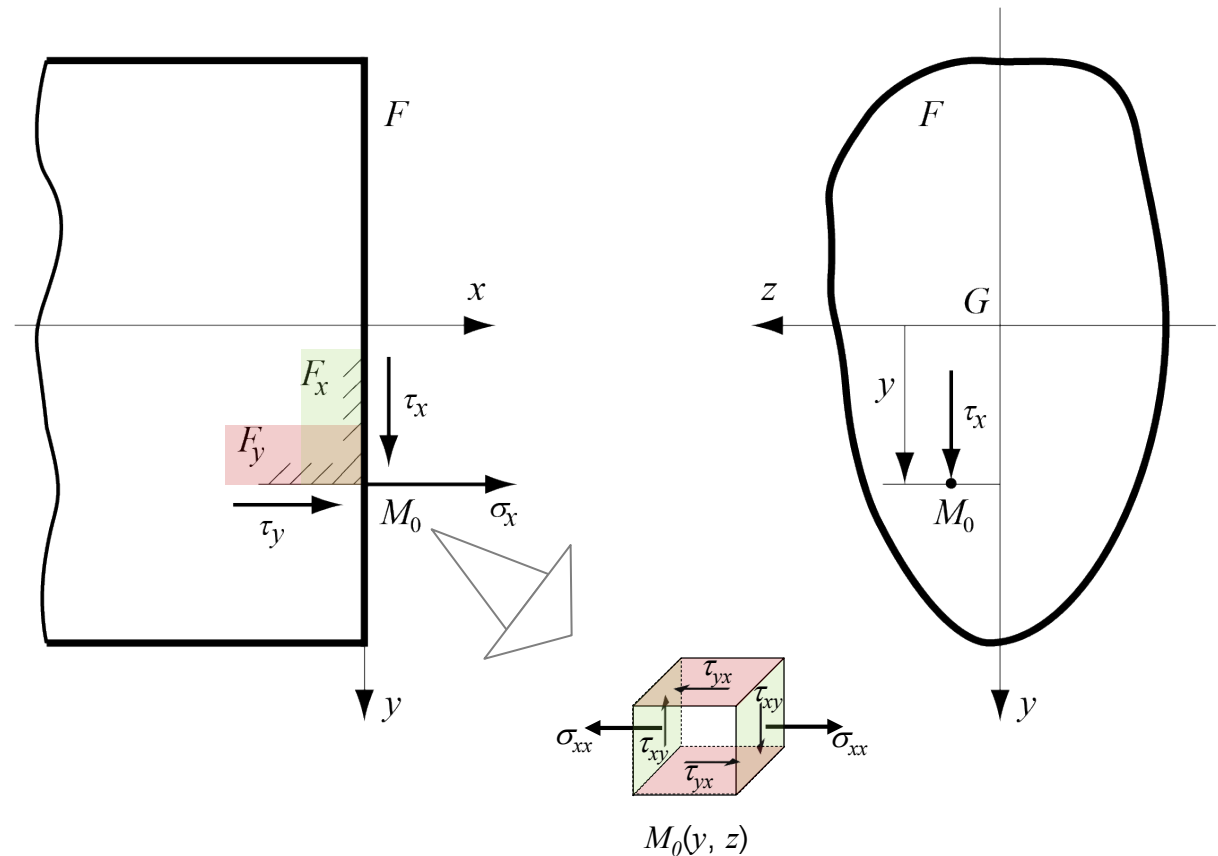
Les contraintes normales et tangentielles en un point $M_0(y, z)$ de la section d'une poutre soumise à la flexion simple, ont pour valeur

Sur la face F_x

- $\sigma_x = \frac{y M}{I}$
- $\tau_x = \frac{T S'}{I b}$

Sur la face F_y

- $\sigma_y = 0$
- $\tau_y = -\tau_x$





Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Énergie de déformation due au moment de flexion

Sous l'effet du moment de flexion M , les faces d'un élément de poutre de longueur dx subissent une rotation relative $d\theta$. L' énergie de déformation a ainsi pour valeur

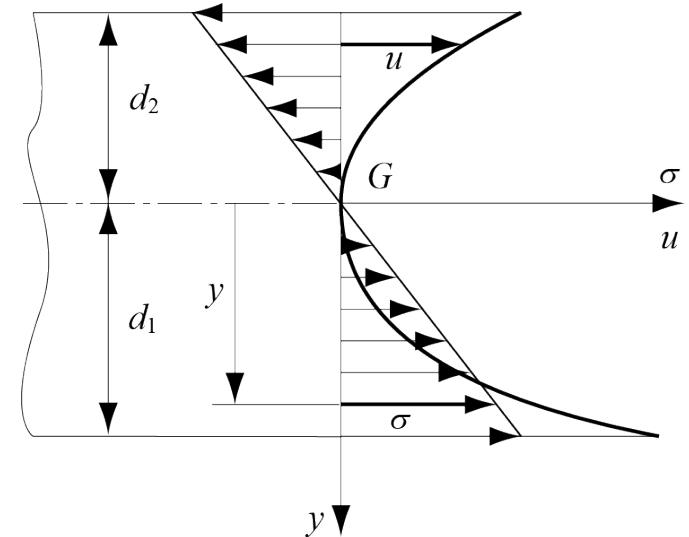
- $dU = \frac{1}{2} M d\theta$

En vertu de $dx = \rho d\theta$ et $1/\rho = M/EI$ (rappel)

- $dU = \frac{M^2}{2EI} dx$
- $U = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EI} dx$

La densité d'énergie u en traction – compression

- $u = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{M^2}{2EI^2} y^2$
 $\sigma = \frac{y M}{I}$





Chapitre 6 : Flexion des poutres droites

Énergie de déformation due à l'effort tranchant

L'énergie due au déplacement d'ensemble a pour valeur (1/2 force x déplacement)

- $dU = \frac{1}{2} T dy_T = \frac{1}{2} T \bar{\gamma} dx$

Le glissement global peut être rapporté à la contrainte tangentielle moyenne

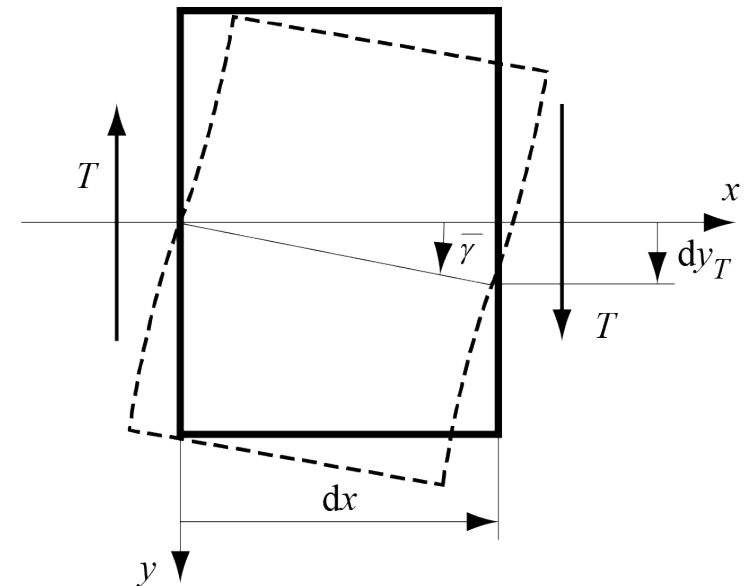
- $\bar{\gamma} = \eta \frac{\tau_{moy}}{G} = \eta \frac{T}{G F}$

où η dénote un nombre pur différent de l'unité

L'énergie de déformation devient

- $dU = \eta \frac{T^2}{2G F} dx$

- $U = \int dU = \int_0^{\ell} \eta \frac{T^2}{2G F} dx$





Problème 6.4

Calculer le coefficient de forme d'une section rectangulaire de largeur L et de hauteur H .

- $$\eta = \frac{F}{I^2} \iint_F \frac{S_I^2}{b^2} dF$$

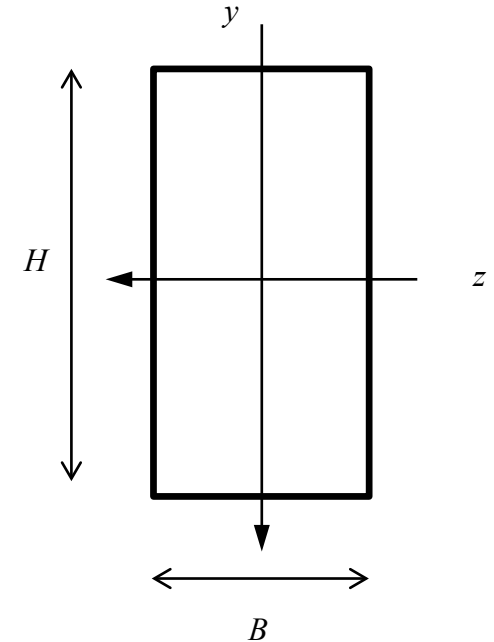
Avec

- $F = BH$

- $I = \frac{BH^3}{12}$

- $b = B$

- $$S_I' = \iint_{F'} y dF' = \int_{y=-H/2}^{H/2} y dy \int_{z=-B/2}^{B/2} dz = \frac{BH^2}{8} \left[1 - \left(\frac{y}{H/2} \right)^2 \right]$$



Ainsi on trouve pour un rectangle

- $$\eta = \frac{144 BH}{B^2 H^6} \int_{y=-H/2}^{H/2} \int_{z=-B/2}^{B/2} \frac{S_I^2}{B^2} dy dz = \frac{9}{4H} \int_{y=-H/2}^{H/2} \left[1 - \left(\frac{y}{H/2} \right)^2 \right]^2 dy = 6/5$$

De manière similaire le coefficient de forme d'une section circulaire vaut $\eta = 10/9$